ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Государственная итоговая аттестация по образовательным программам основного общего образования в 2014 г. в форме ОГЭ

Учебно-методические материалы для подготовки экспертов предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом

МАТЕМАТИКА

Москва
2014

Составители: Л.В. Кузнецова, Л.О. Рослова

Повышение объективности результатов государственной итоговой аттестации выпускников IX классов общеобразовательных учреждений во многом определяется качеством экспертной проверки предметными комиссиями выполнения заданий с развернутым ответом.

Порядок проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования (приказ №1394 от 25.12.2013) устанавливает обязательность прохождения экспертами, проверяющими экзаменационные работы обучающихся, "дополнительного профессионального образования, включающего в себя практические занятия (не менее 18 часов) по оцениванию образцов экзаменационных работ в соответствии с критериями оценивания экзаменационных работ по соответствующему учебному предмету, определяемыми Рособрнадзором".

С этой целью специалистами Федерального института педагогических измерений подготовлены методические пособия для организации подготовки экспертов предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом в 2014 г. Пособие по предмету включает в себя описание экзаменационной работы 2014 г., научно-методические подходы к проверке и оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов учащихся с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Содержание

1. Характеристика экзаменационной работы 2014 года. Назначение заданий с развернутым ответом

Содержание экзаменационных заданий по математике находится в рамках содержания образования, обозначенного «Федеральным компонентом государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование» (Приказ Минобразования России от 05.03.2004 №1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

Работа состоит из трех модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика». В модули «Алгебра» и «Геометрия» входит две части, соответствующие проверке на базовом и повышенном уровнях, в модуль «Реальная математика» - одна часть, соответствующая проверке на базовом уровне.

При проверке базовой математической компетентности учащиеся должны продемонстрировать: владение основными алгоритмами, знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение пользоваться математической записью, применять знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применять математические знания в простейших практических ситуациях.

Каждое задание базового уровня характеризуется пятью параметрами: элемент содержания; проверяемое умение; категория познавательной области; уровень трудности; форма ответа. Предусмотрены следующие формы ответа: с выбором ответа из четырех предложенных вариантов, с кратким ответом, на соотнесение, с записью решения.

Части 2 модулей «Алгебра» и «Геометрия» направлены на проверку владения материалом на повышенном уровне. Их назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Эти части содержат задания повышенного уровня сложности из различных разделов курса математики. Все задания требуют записи решений и ответа. Задания расположены по нарастанию трудности – от относительно более простых до сложных, предполагающих свободное владение материалом курса и хороший уровень математической культуры.

<u>Модуль «Алгебра»</u> содержит 11 заданий: ***в части 1*** - 8 заданий, ***в части 2*** - 3 задания.

<u>Модуль «Геометрия»</u> содержит 8 заданий: ***в части 1*** - 5 заданий, ***в части 2*** - 3 задания.

<u>Модуль «Реальная математика»</u> содержит 7 заданий.

Всего: 26 заданий, из которых 20 заданий базового уровня и 6 заданий повышенного.

Все задания второй части экзаменационной работы носят комплексный характер. Они позволяют проверить владение формально-оперативным аппаратом, способность к интеграции знаний из различных тем школьного курса, владение достаточно широким набором приемов и способов рассуждений, а также умение математически грамотно записать решение.

Задания части 2 относятся к двум модулям – «Алгебра» и «Геометрия». В внутри каждого модуля они расположены по нарастанию сложности – от относительно простой задачи до задач достаточно сложных, требующих свободного владения материалом курса и высокого уровня математического развития. Фактически во второй части работы представлены три разных уровня. Первые задания (задание 21

– алгебраическое, задание 24 – геометрическое) наиболее простые. Как правило, они направлены на проверку владения формально-оперативными алгебраическими навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, систем, построение графика, и умению решить несложную геометрическую задачу на вычисление. По уровню сложности эти задания немногим превышают обязательный уровень.

Следующие два задания (задание 22 – алгебраическое, задание 25 – геометрическое) более высокого уровня, они сложнее предыдущих и в техническом, и в логическом отношении. При хорошем выполнении первой части правильное выполнение этих заданий соответствует отметке «5».

И, наконец, последние два задания (задание 23 – алгебраическое, задание 26 – геометрическое) наиболее сложные, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на выпускников, изучавших математику более основательно, чем в рамках пятичасового курса, – это, например, углубленный курс математики, элективные курсы в ходе предпрофильной подготовки, математические кружки и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении выпускник должен продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера.

2. Оценивание выполнения заданий с развернутым ответом

2.1. Общие подходы к формированию критериев оценивания

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение ученика удовлетворяет этим требованиям, то ему выставляется полный балл, которым оценивается это задание: № 21 и 24 – 2 балла, № 22 и 25 – 3 балла, № 23 и 26 – 4 балла. Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного.

В критериях оценивания по каждому конкретному заданию второй части экзаменационной работы эти общие позиции конкретизируются и пополняются с учетом содержания задания. Критерии разработаны применительно к одному из возможных решений, а именно, к тому, которое описано в рекомендациях. При наличии в работах учащихся других решений критерии вырабатываются предметной комиссией с учетом описанного общего подхода. Решения учащихся могут содержать недочеты, не отраженные в критериях, но которые, тем не менее, позволяют оценить результат выполнения задания положительно (со снятием одного балла). В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочет, принимает предметная комиссия.

2.2. Критерии проверки и оценивания выполнения заданий с развернутым ответом

Задание 21

1. *Разложите на множители*: $x^2y + 1 - x^2 - y$.

Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

Решение. $x^2y + 1 - x^2 - y = x^2(y-1) - (y-1) = (y-1)(x^2-1) = (y-1)(x-1)(x+1)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно и до конца (получено три множителя) выполнено разложение на множители.
1	Ход решения верный, не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца (выражение представлено в виде произведения двух множителей).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибка в знаках при группировке слагаемых считается существенной, при ее наличии решение не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№19. $x^2y+1-x^2-y = x^2y-x^2+1-y = x^2(y-1)-1(y-1) = (x^2-1)(y-1)$

За решение выставляется 1 балл, так как оно не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца.

Пример 2.

19. $x^2y+1-x^2-y = x^2(y-1)+1-y =$
$=(y-1)(x^2+1)$

За решение выставляется 0 баллов; допущена ошибка в знаках при группировке слагаемых (см. комментарий к критериям).

2. *Сократите дробь* $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{x}$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $5x^2-3x-2$: $x_1 = 1, x_2 = -\dfrac{2}{5}$. Имеем

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} = \frac{x-1}{x}.$$

Замечание. Учащийся может разложить трехчлен на множители каким-либо иным способом. Например:

$5x^2 - 3x - 2 = (3x^2 - 3x) + (2x^2 - 2) = 3x(x - 1) + 2(x^2 - 1) = (x - 1)(5x + 2)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя дроби, получен верный ответ.
1	Допущена описка или ошибка вычислительного характера при нахождении корней квадратного трехчлена, но разложение его на множители с учетом этой ошибки выполнено верно, решение при этом может оказаться не доведенным до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

Комментарий. Учащиеся не обязаны указывать область определения сокращаемой дроби.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

19) $\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \frac{5(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{5x\cancel{(x+0,4)}} = \frac{x-1}{x}$

$5x^2-3x-2=0;$

$D=9+40=49;$

$x=\frac{3\pm7}{10};\quad x_1=1;\ x_2=-0,4;$

За решение выставляется 2 балла. Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.

Пример 2.

$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \frac{5(x-1)(x+0,4)}{5x^2+2x} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} =$

$= \frac{x-1}{x}$

О.Д.З.

$5x+2\neq0$

$x\neq-\frac{2}{5}$

Сокращение дроби выполнено верно. Но так как при указании ОДЗ допущена ошибка (хотя нахождение области определения дроби в данном случае не требуется), за решение выставляется 1 балл.

Задание 22

1. *Решите неравенство* $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$.

Ответ: $(-\infty;\,1,5)$. Другая возможная форма ответа: $x<1,5$.

Решение. 1) Определим знак разности $\sqrt{3}-1,5$. Так как $1,5=\sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3}>\sqrt{2,25}$, то $\sqrt{3}-1,5>0$.

2) Получаем неравенство $3-2x>0$. Отсюда $x<1,5$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении линейного неравенства допущена вычислительная ошибка или описка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

20. $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$

$\sqrt{3}-1,5>0$

$3-2x>0$

$-2x>-3$

$x<-\frac{3}{2}$

$x<-1,5$

Ответ: $x\in(-\infty;-1,5)$

Допущена ошибка вычислительного характера на последнем шаге решения. Оценка снижается на 1 балл, за решение выставляется 2 балла.

Замечание. Можно не требовать дополнительных пояснений в предъявленной цепочке выкладок, так как, по всей видимости, учащийся знает, что $\sqrt{3}\approx 1,7$, и для него очевидно, что $\sqrt{3}-1,5>0$.

Пример 2

20. $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$

$\sqrt{3}\approx 1,7$, $\sqrt{3}>1,5$

$3-2x>0$

$-2x>-3$

$x>1,5$ Ответ: $(1,5;+\infty)$

Допущена ошибка принципиального характера в алгоритме решения неравенства. За решение выставляется 0 баллов.

2. *Постройте график функции* $y = f(x)$, *где*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3, & \text{åñëè} \quad x < 3, \\ -x + 7, & \text{åñëè} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

При каких значениях x функция принимает значения, меньшие 2?

Ответ: график изображен на рисунке 1; $f(x) < 2$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.

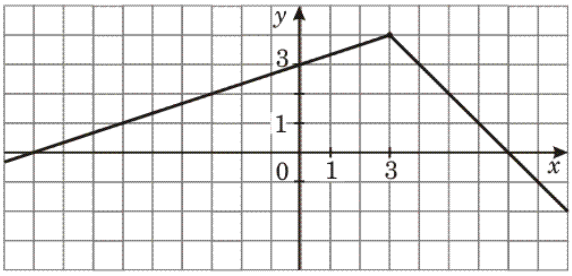


Рис. 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Правильно построен график, дан правильный ответ на вопрос.
2	Правильно построен график, но отсутствует ответ на вопрос; ИЛИ при правильно вычисленных координатах точек графика допущена неточность в построении, ответ дан с учетом этой неточности; ИЛИ при записи ответа допущена погрешность, например, вместо круглой скобки поставлена квадратная.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий.

1. Отсутствие пояснений и письменных вычислений при правильном построении графика и правильном ответе на вопрос не должно служить основанием для снижения балла.
2. Ответ на вопрос задания может быть получен как путем вычислений, так и с опорой на график.
3. Ответ на вопрос может быть записан в любой правильной форме.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

18. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3, & x < 3 \\ -x + 7, & x \geq 3 \end{cases}$

1) $y = \frac{1}{3}x + 3$

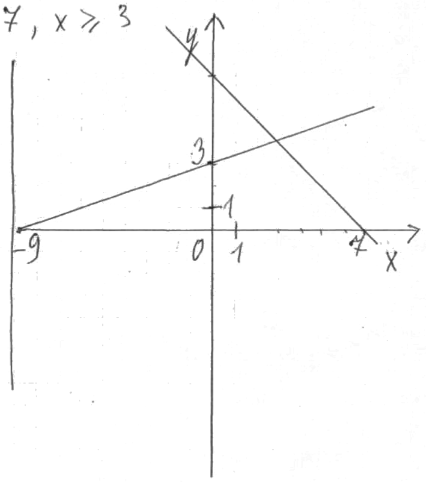
$x = 0, y = 3$

$y = 0, x = -9$

2) $y = -x + 7$

$x = 0, y = 7$

$y = 0, x = 7$



За решение выставляется 0 баллов. Учащийся должен был выделить каким-либо способом (например, жирно) собственно график заданной функции.

Пример 2.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3, & \text{если } x < 3 \\ -x + 7, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$

1) $y = \frac{1}{3}x + 3$, график - прямая

x	0	3
y	3	4

2) $y = -x + 7$, график - прямая

x	0	5	3
y	7	2	4

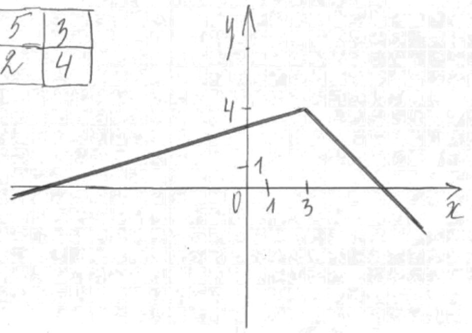


График построен правильно, отсутствует ответ на вопрос. В соответствии с критериями выставляется 2 балла.

3. *Найдите область определения выражения* $\dfrac{\sqrt{21 + 2x - 3x^2}}{3x - 7}$.

Ответ: $\left[-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; 3\right]$.

Решение. Область определения выражения задается условиями $\begin{cases} 21 + 2x - 3x^2 \geq 0, \\ 3x - 7 \neq 0. \end{cases}$

Решим неравенство $21+2x-3x^2 \geq 0$: $3x^2-2x-21 \leq 0$; $x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = 3$; $x \in \left[-\frac{7}{3}; 3\right]$;

Из условия $3x-7 \neq 0$ имеем $x \neq \frac{7}{3}$. Отсюда $x \in \left[-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; 3\right]$.

Замечание. Ответ может быть представлен в форме: $-\frac{7}{3} \leq x < \frac{7}{3}$; $\frac{7}{3} < x \leq 3$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Учтены оба условия, задающие область определения данного выражения, все выкладки выполнены верно, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущена ошибка в символической записи ответа; ИЛИ допущена описка или ошибка вычислительного характера (например, при вычислении корней квадратного трехчлена), и с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; ИЛИ при определении области определения квадратного корня рассмотрено строгое неравенство.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки в алгоритме решения квадратного неравенства, в применении формулы корней квадратного уравнения считаются существенными, и решение при их наличии не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1

20.

$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$

$3x-7 \neq 0$, т.к. дробь будет неверной, если знаменатель будет равен нулю.

1) $21+2x-3x^2=0$

$-3x^2+2x+21=0 \quad |\cdot(-1)$

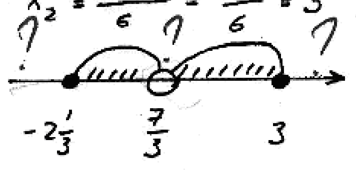
$3x^2-2x-21=0$

$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-21)=4+252=256=16^2$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{2-16}{6}=\frac{-14}{6}=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{2+16}{6}=\frac{18}{6}=3$



$3x-7 \neq 0 \rightarrow$

$x=7/3=2\frac{1}{3}$

Ответ. $[-2\frac{1}{3}; \frac{7}{3}), (\frac{7}{3}; 3]$.

За решение выставляется 2 балла. Ход рассуждений понятен, он правильный, получен верный ответ. Балл снижен за некорректное пояснение, приведенное в начале решения.

Замечание. Вопросительные знаки поставлены на схеме экспертом; мы в этом рисунке недочетов не видим.

Пример 2.

№ 20

$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$21+2x-3x^2 \geq 0$

$-3x^2+2x+21 \geq 0$

Рассмотрим квадратичную ф-ю $f(x) = -3x^2+2x+21$, гр. парабола ветви вниз.

нули:

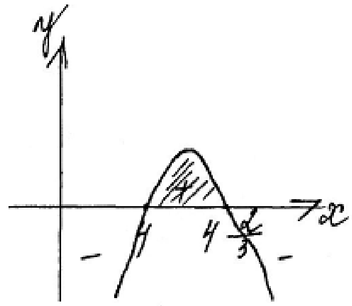
$-3x^2+2x+21=0$

$D = 4 - 4\cdot(-3)\cdot 21 = 256$

$x_1 = \frac{-2+26}{-6} = 4$

$x_2 = \frac{-2-26}{-6} =$

$= -\frac{28}{-6} = 4\frac{4}{6} = 4\frac{2}{3}$

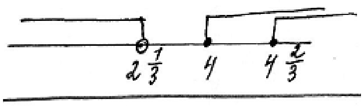


$[4;\ 4\frac{2}{3}].$

$3x-7 \neq 0$

$3x \neq 7$

$x \neq 2\frac{1}{3}$



Ответ:

$[4;\ 4\frac{2}{3}]\ ;\ (-\infty;\ 2\frac{1}{3}).$

За решение выставляется 0 баллов; в нем содержится более одной ошибки, поэтому оно соответствует графе «Другие случаи, не соответствующие указанным критериям». Учащимся, во-первых, допущены две вычислительные ошибки при нахождении корней квадратного трехчлена; во-вторых, решив квадратное неравенство (с учетом найденных корней) и правильно наложив ограничение на знаменатель дроби, учащийся не сумел сделать на основе полученных результатов соответствующий вывод.

4. *Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии* $-8{,}6;\ -8{,}4;\ \ldots$

Ответ: $-189{,}2$.

Решение. 1. Найдем разность прогрессии: $d = -8{,}4 + 8{,}6 = 0{,}2$.

2. Найдем число отрицательных членов прогрессии.

Составим формулу n-го члена: $a_n = -8{,}6 + 0{,}2(n-1) = 0{,}2n - 8{,}8$.

Решим неравенство $0{,}2n - 8{,}8 < 0$; получим $n < 44$. Значит, $n = 43$.

3. $S_{43} = \dfrac{(2\cdot(-8{,}6) + 0{,}2\cdot 42)\cdot 43}{2} = -189{,}2$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения правильный, все его шаги выполнены верно, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущена одна описка или непринципиальная ошибка вычислительного характера, с ее

	учетом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий.

1. Учащийся имеет право воспользоваться другой формулой суммы первых *n* членов арифметической прогрессии.

2. Ошибки в применении формул, в том числе в подстановке числовых значений в формулы, считаются существенными, решение не засчитывается и оценивается 0 баллов.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

21) Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; \ldots$

$a_1 = -8,6,\ d = 0,4$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_n = -8,6 + \cancel{d}\,0,4(n-1)$

$-8,6 + 0,4(n-1) < 0$

$0,4n - 9 < 0$

$n < \dfrac{9}{0,4} = 22,5$

$n < 22,5,\ n = 22$

$a_{22} = -8,6 + 0,4 \cdot 21 = -8,6 + 8,4 = -0,2.$

$S_{22} = \dfrac{-8,6 + (-0,2)}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{22}^{11} = -8,8 \cdot 11 =$

$= -96,8$

Ответ: $-96,8$

Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка (при нахождении разности арифметической прогрессии), с ее учетом решение доведено до конца. Выставляется 2 балла.

Задание 23

1. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1; \\ (x+5)(2y-1) = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-5; -2)$, $(-5; 1)$, $(-2,5; 0,5)$. Другие возможные формы записи ответа:

$x_1 = -5,\ y_1 = -2$; $x_2 = -5,\ y_2 = 1$; $x_3 = -2,5,\ y_3 = 0,5$;

или $\begin{cases} x_1 = -5, \\ y_1 = -2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5, \\ y_2 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -2,5, \\ y_3 = 0,5. \end{cases}$

Решение. На основании условия равенства произведения нулю получим:

$\begin{cases} x + 5 = 0, \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y - 1 = 0, \\ 2y^2 + x + 2y = -1. \end{cases}$

Решим первую систему. Из первого уравнения имеем $x = –5$; подставив это значение x во второе уравнение, получим уравнение $2y^2 + 2y - 4 = 0$. Его корни: $y_1 = –2$, $y_2 = 1$.
Получаем два решения системы уравнений: (–5; –2) и (–5; 1).
Решив вторую систему, получим: $y = 0,5$; $x = –2,5$. Получаем еще одно решение системы уравнений: (–2,5; 0,5).
Таким образом, система имеет три решения: $(-5; -2), (-5; 1), (-2,5; 0,5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Правильно выполнен переход от данной системы к равносильной ей дизъюнкции (совокупности) двух систем, все дальнейшие шаги выполнены верно, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, решение доведено до конца, найденные значения переменных правильно объединены в пары, но: ИЛИ допущена одна непринципиальная вычислительная ошибка (например, при нахождении корней квадратного уравнения) или описка, с ее учетом все дальнейшие шаги выполнены верно; ИЛИ допущены погрешности логического характера в употреблении символики (если она применяется).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки при объединении найденных значений переменных в пары считаются существенными; в этом случае решение не засчитывается. Если имеется более двух вычислительных ошибок или решение не доведено до конца, то оно не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№22. $\begin{cases} 2y^2+x+2y=-1 \\ (x+5)(2y-1)=0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x+5=0 \\ 2y-1=0 \end{array} \right.$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=\frac{1}{2}=0,5 \end{cases}$ 1) $x=-5$ $2y^2-5+2y=-1$ $2y^2+2y-4=0$ $D=4-4\cdot2\cdot(-4)=4+32=36$ $\sqrt{D}=6$ $y_{1,2}=\frac{-2\pm6}{4}$ $y_1=2$ $y_2=-1$ $(-5;2)$; $(-5;-1)$.	2) $y=0,5$ $2\cdot0,25+x+2\cdot0,5=-1$ $0,5+x+1=-1$ $1,5+1=-x$ $x=-2,5$ $(-2,5;0,5)$ Ответ: $(-5;2)$; $(-5;-1)$; $(-2,5;0,5)$.

За решение выставляется 3 балла; допущены ошибки в употреблении символики.

Пример 2.

№22.

$$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)\cdot(2y-1) = 0 \end{cases}$$

$x = -1 - 2y - 2y^2$

$(5 - 1 - 2y - 2y^2)(2y-1) = 0$

$(4 - 2y^2 - 2y)(2y-1) = 0$

$4 - 2y^2 - 2y = 0$ $\qquad$ $2y - 1 = 0$

$-2y^2 - 2y + 4 = 0 \,|\, : -2$ $\qquad$ $2y = 1$

$y^2 + y - 2 = 0$ $\qquad$ $y_3 = \frac{1}{2}$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $\qquad$ $x_3 = -1 - 1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$y_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$y_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_1 = -1 - 2 - 2 = -5$

$x_2 = -1 + 4 - 8 = -5$

Проверка:

$(-5; 1)$ $\qquad$ $(-5; -2)$ $\qquad$ $(-2{,}5; 0{,}5)$ – не подходит

$2 - 5 + 2 = -1$ $\qquad$ $8 - 5 - 4 = -1$ $\qquad$ $3{,}5 - 2{,}5 + 3 \neq -1$

$(-5+5)(2-1) = 0$ $\qquad$ $(-5+5)(-4-1) = 0$ $\qquad$ $(-2{,}5+5)(3-1) \neq 0$

Ответ: $(-5; 1); (-5; -2)$.

За решение можно выставить 3 балла: ход решения правильный, и, по сути, верный ответ получен. Но решение содержит логическую ошибку: выполнив проверку (которая в данном случае не является составной частью решения и может служить только цели самоконтроля), учащийся допустил вычислительную ошибку и сделал неправильный вывод о наличии постороннего решения, которого в принципе в данной ситуации быть не может.

Замечание. За нерациональное решение баллы не снимаются. Хотя хотелось бы, чтобы для сильного учащегося наличие уравнения $(x+5)(2y-1)=0$ сразу же служило сигналом к попытке применить условие равенства нулю произведения. Приведенное решение показывает (и это не единичный случай), что не наработаны некоторые стандартные приемы, обязательные для подготовки сильного ученика.

2. *Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту* *возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки*?

Ответ: плот пройдет $\frac{2}{5}$ всего пути.

Решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению – в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл S км, то катер – в 3 раза больше, т. е. $3S$ км. После встречи катер пройдет $3S$ км, а плот – в 5 раз меньше, т. е. $\frac{3S}{5}$ км. Всего плот пройдет $S + \frac{3S}{5} = \frac{8S}{5}$. Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно $\frac{\frac{8S}{5}}{4S} = \frac{2}{5}$.

Другое возможное решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Скорость сближения катера и плота равна $x + 3x = 4x$ км/ч. Встреча произошла через $\frac{AB}{4x}$ ч. За это время плот проплыл расстояние, равное $x \cdot \frac{AB}{4x} = \frac{AB}{4}$, а катер – $\frac{3AB}{4}$.

Обратный путь катер пройдет за $\frac{\frac{3AB}{4}}{5x} = \frac{3AB}{20x}$ ч. Плот за это время проплывет расстояние, равное $x \cdot \frac{3AB}{20x} = \frac{3AB}{20}$, а всего он проплывет $\frac{AB}{4} + \frac{3AB}{20} = \frac{2AB}{5}$.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания**
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка – в преобразованиях или в вычислениях, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены правильно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№ 21

Пусть x км/ч – скорость плота

Тогда $4x$ км/ч – скорость катера в стоячей воде.

$4x+x=5x$ – скорость катера по течению, $4x-x=3x$ – против течения.

Плывут навстречу друг другу, скорость сближения $x+3x=4x$.

$\frac{s}{4x}$ ч – время до встречи

$\frac{s}{4x}\cdot 3x=\frac{3s}{4}$ км – катер проплыл до встречи.

$\frac{3s}{4}:5x=\frac{3s}{20x}$ ч – время на обратный путь (катер)

Всего время: $\frac{s}{4x}+\frac{3s}{20x}=\frac{8s}{20x}=$

$=\frac{2s}{4x}$ ч.

За это время плот проплыл

$\frac{2s}{4x}\cdot x=\frac{2s}{4}=\frac{s}{2}$ км.

Ответ: половину пути

Ход решения верный, введены нужные обозначения, приведены пояснения, но допущена вычислительная ошибка, с ее учетом решение доведено до конца. Можно выставить 3 балла.

Пример 2.

Пусть x км/ч — скорость плота
$4x$ км/ч — скорость катера
Если плот проплыл до встречи y км,
то катер в 4 раза больше, т.е. $4y$ км.
Обратно катер прошел $4y$ км по течению.
Его скорость $5x$ км/ч, т.е. в 5 раз
больше, чем у плота.
Тогда плот прошел $\frac{4y}{5}$ км. Всего
он проплыл $x + \frac{4y}{5} = \frac{9y}{5}$ км
Все расстояние: $y + 4y = 5y$ км.
$\frac{\frac{9y}{5}}{5y} = \frac{9y}{25y} = \frac{9}{25}$.
Ответ: $\frac{9}{25}$ всего пути.

При нахождении длины пути, который катер проплыл против течения, учащийся использует собственную скорость катера; решение оценивается 0 баллами.

3. *Найдите все значения a, при которых неравенство* $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \le 0$ *не имеет решений.*

Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1; 3)$.

Решение. График функции $y = x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ должен быть отрицателен.

Имеем $D_1 = (a + 2)^2 - (8a + 1) = a^2 - 4a + 3 < 0$.

Решив квадратное неравенство, получаем $1 < a < 3$.

Замечание. Учащийся может воспользоваться формулой дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Другое возможное решение. Найдем ординату вершины параболы y_0 и выясним, при каких значениях a выполняется неравенство $y_0 > 0$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Найден правильный способ решения, все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.
3	Найден правильный способ решения, все шаги выполнены верно, но допущена одна ошибка технического характера (вычислительная или в преобразованиях), при этом решение доведено до конца (ответ может отличаться от правильного).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки при составлении дискриминанта квадратного трехчлена или в применении алгоритма решения квадратного неравенства являются существенными, и при их наличии за решение выставляется 0 баллов.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

$x^2+(2a+4)x+8a+1 \le 0.$ найти все значения a при которых решений нет.

т.е. при каких a график параболы не будет пересекать $y=0$.

$D<0$; $D=(2a+4)^2-4(8a+1)=$

$=4a^2+16a+16-32a-4=$

$=4a^2-16a+12<0.$

$a^2-4a+3<0$

$(a-1)(a-3)<0.$

$\cancel{a\in(-3;1)}$ $a\in(1;3)$

Ответ: при $a\in(1;3)$

Все шаги решения выполнены верно (хотя есть погрешность в терминологии), получен правильный ответ. За решение можно выставить 4 балла.

Пример 2.

$x^2+(2a+4)x+8a+1\le0$

$D=(2a+4)^2-4(8a+1)\cdot1=$

$=4a^2+16a+16-32a-4=4a^2-16a+12$

$4a^2-16a+12\le0$

$D=256-\underbrace{4\cdot4\cdot12}_{192}=64=8^2$

$a_{1,2}=\frac{16\pm8}{16}$

$a_1=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

$a_2=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$

Ответ: при $a=\frac{3}{4}$ и $a=\frac{3}{2}$ ур-е не имеет реш-й

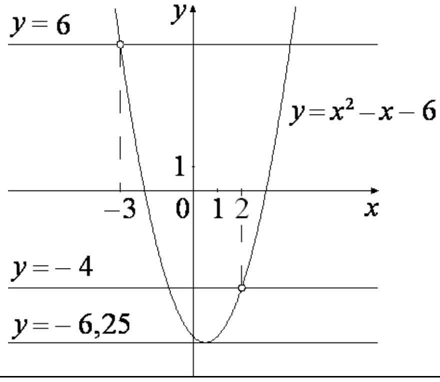
За решение выставляется 0 баллов. Учащийся не владеет приемом решения квадратного неравенства, допускает ошибки в применении формулы корней квадратного уравнения.

4. *Постройте график функции* $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x+3)(x-2)}$ *и определите, при каких значениях* c *прямая* $y = c$ *имеет с графиком ровно одну общую точку.*

<u>Ответ</u>: $-6,25$; -4; 6.

<u>Решение</u>. Разложим числитель на множители:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2-4)(x^2-9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$



При $x \ne -3$, $x \ne 2$ исходная функция принимает вид $y = (x+2)(x-3)$, её график — парабола, из которой выколоты точки $(-3; 6)$ и $(2; -4)$.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая.

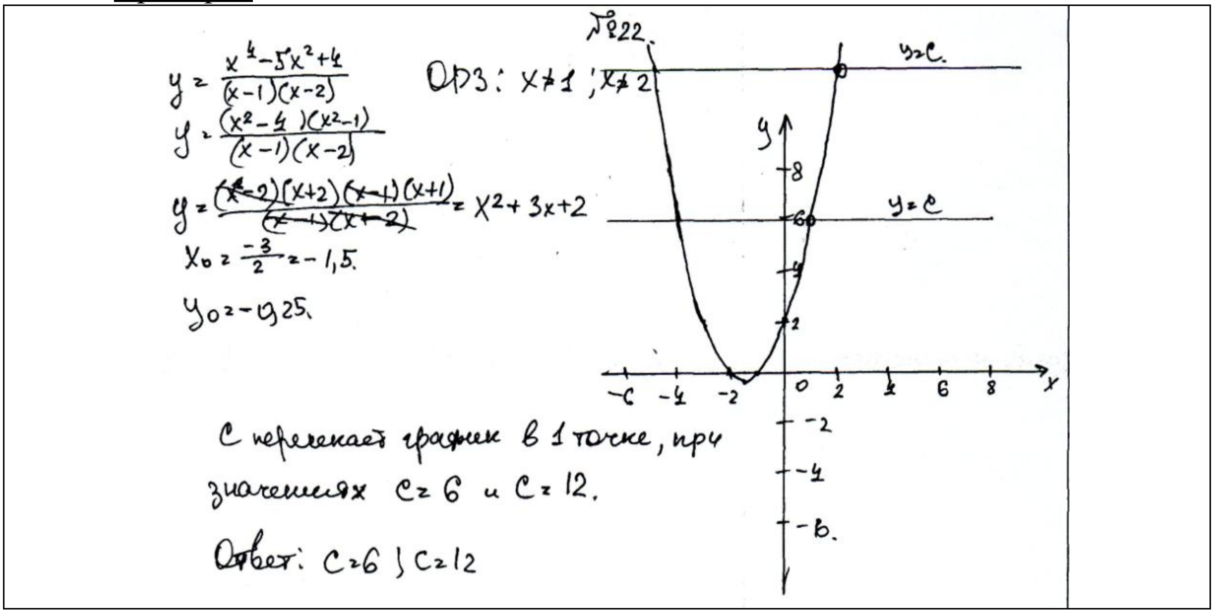
Вершина параболы имеет координаты $(0,5; -6,25)$.

Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
4	График построен правильно, верно указаны все значения c, при которых прямая $y = c$ имеет с графиком только одну общую точку
3	График построен правильно, указаны не все верные значения c
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

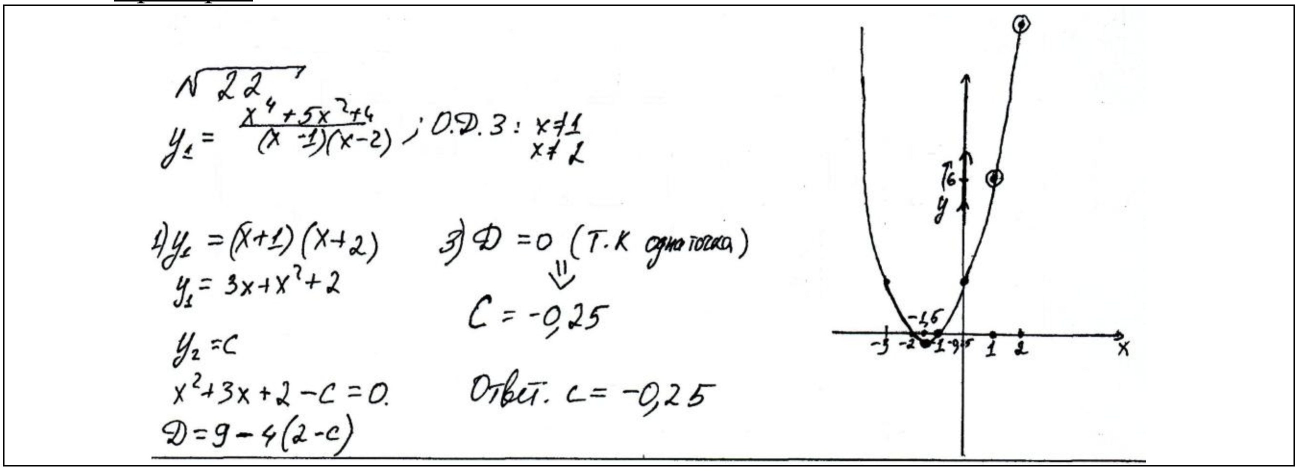
<u>Примеры выполнения заданий учащимися</u>

<u>Пример 1.</u>



За решение выставляется 3 балла. Учащийся верно упростил выражение, указал ОДЗ, верно построил график и выколол обе точки, но не учел, что прямая, параллельная оси абсцисс имеет с параболой одну общую точку, проходя через ее вершину. Один балл снят за потерю соответствующего значения параметра.

Пример 2.



№ 22

$y_1 = \frac{x^4+5x^2+4}{(x-1)(x-2)}$; О.Д.З: $x \neq 1$, $x \neq 2$

1) $y_1 = (x+1)(x+2)$

$y_1 = 3x + x^2 + 2$

$y_2 = c$

$x^2 + 3x + 2 - c = 0$

$D = 9 - 4(2-c)$

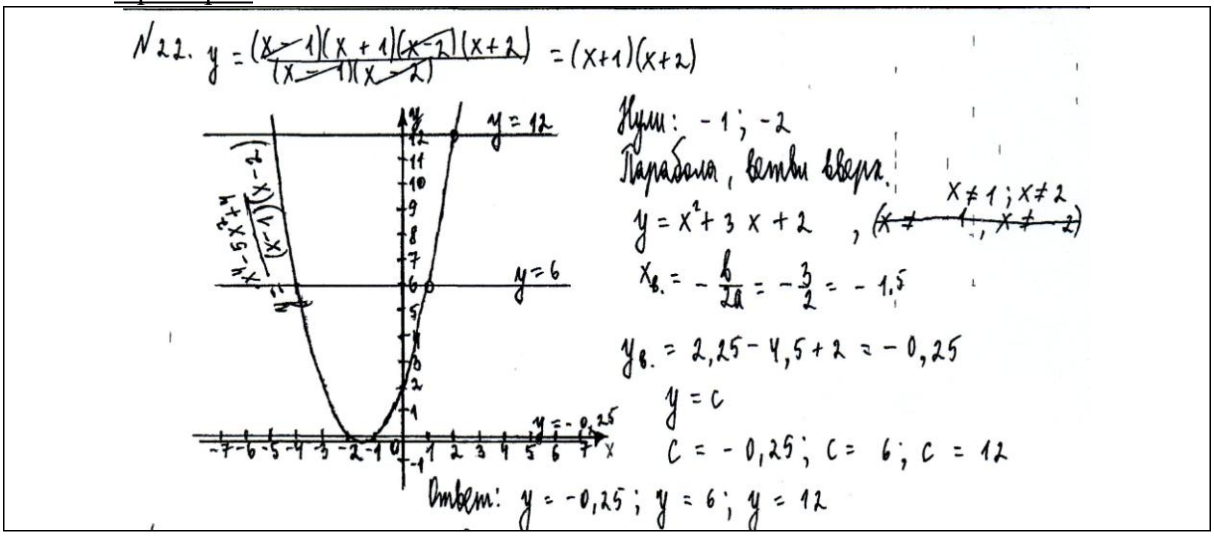
3) $D = 0$ (т.к одна точка)

$C = -0{,}25$

Ответ. $c = -0{,}25$

За решение выставляется 3 балла. Один балл снят за то, что учащийся не указал еще два решения, соответствующих выколотым точкам параболы.

Пример 3.



№22. $y = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = (x+1)(x+2)$

Нули: -1; -2

Парабола, ветви вверх.

$y = x^2 + 3x + 2$, $x \neq 1$; $x \neq 2$ ~~($x \neq 1$, $x \neq 2$)~~

$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

$y_в = 2{,}25 - 4{,}5 + 2 = -0{,}25$

$y = c$

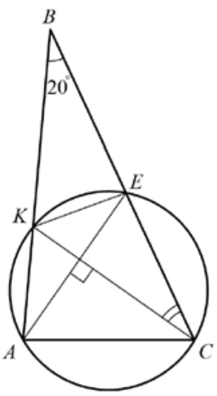
$c = -0{,}25$; $c = 6$; $c = 12$

Ответ: $y = -0{,}25$; $y = 6$; $y = 12$

Задание выполнено верно, за его выполнение выставляется 4 балла.

Задание 24

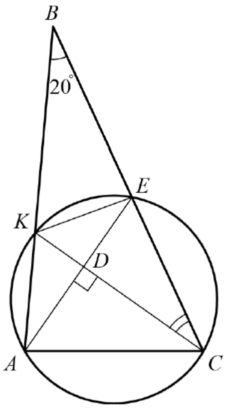
1. *Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите* $\angle KCB$ *, если* $\angle ABC = 20^\circ$.



Ответ: 35°.

Решение.

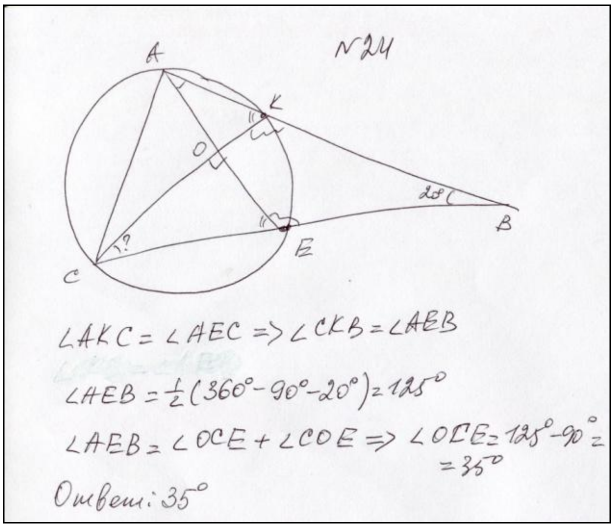
$\angle AKC = \angle AEC$, т.к. опираются на одну дугу окружности; следовательно, $\angle BKC = \angle BEA$, как смежные с ними. Из четырехугольника $BKDE$: $\angle BKC = \frac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ - 20^\circ) = 125^\circ$. Из ΔBKC $\angle KCB = 180^\circ - 125^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.



Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но не даны объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям
2	Максимальный балл

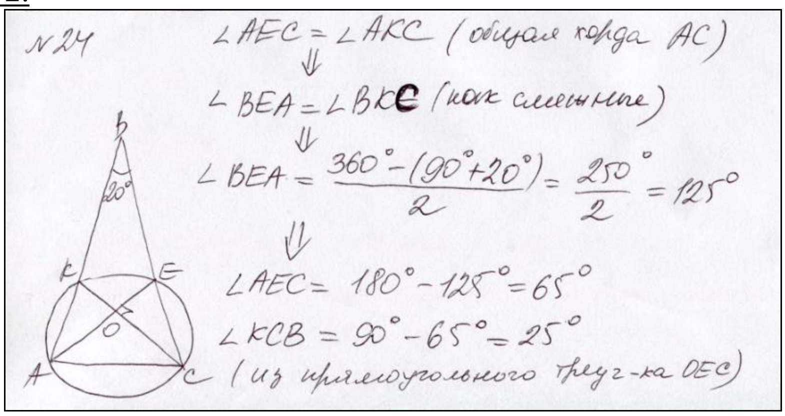
Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.



За выполнение задания выставляется 1 балл, т.к. отсутствуют пояснения и ссылки на использованные теоремы.

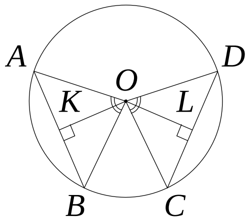
Пример 2.



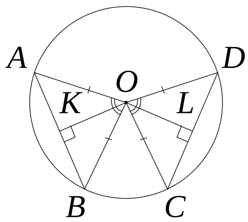
За задание выставляется 1 балл, т.к. допущена вычислительная ошибка, которая не носит принципиального характера; задание доведено до конца.

Задание 25

1. *В окружности с центром O проведены две хорды AB и CD так, что центральные углы AOB и COD равны. На эти хорды опущены перпендикуляры OK и OL. Докажите, что OK и OL равны.*



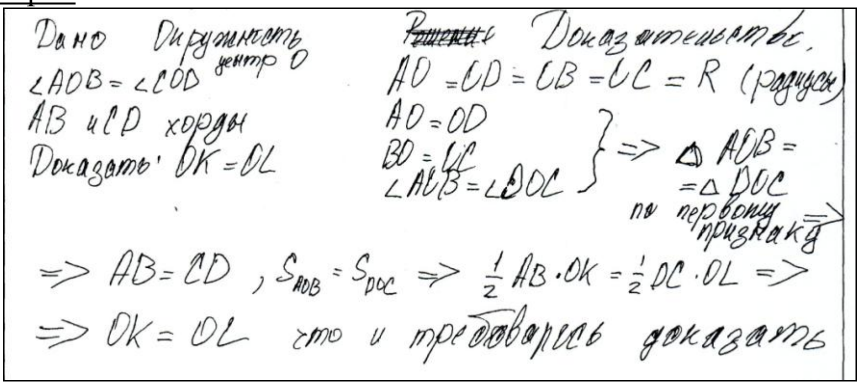
Доказательство. Треугольники AOB и COD равны по трём сторонам.
Треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы окружности, $\angle AOB = \angle COD$ по условию). Следовательно, высоты OK и OL равны как соответственные элементы равных треугольников.



Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
3	Доказательство верное
2	Доказательство содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям
3	*Максимальный балл*

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.



Дано Окружность центр O
$\angle AOB = \angle COD$
AB и CD хорды
Доказать: $OK = OL$

~~Решение~~ Доказательство.
$AO = OD = OB = OC = R$ (радиусы)
$AO = OD$
$BO = OC$
$\angle AOB = \angle DOC$ } $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle DOC$ по первому признаку $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CD$, $S_{AOB} = S_{DOC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot OK = \frac{1}{2} DC \cdot OL \Rightarrow$
$\Rightarrow OK = OL$ что и требовалось доказать

Учащийся не указывает явно, что *OK* и *OL* являются высотами рассматриваемых треугольников, но использует это в неявном виде, переходя к формуле площади треугольника. Это можно не считать неточностью. За выполнение задания выставляется 3 балла.

Замечание. Учащиеся должны указывать соответствующий признак равенства треугольников.

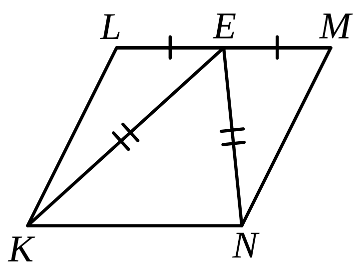
Пример 2.

$AO = OB = OD = OC$ (как радиусы)
Значит $\triangle AOB = \triangle DOC$ (т.к. $\angle AOB = \angle DOC$ по условию). Следовательно OK и OL – высоты в $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$, проведённые из равных ~~вершин~~ углов. Значит $OK = OL$

Учащийся не указал соответствующий признак равенства треугольников. За эту неточность снимается 1 балл и выставляется 2 балла.

2. *В параллелограмме KLMN точка E — середина стороны LM . Известно, что EK = EN . Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.*

Решение.



Доказательство.

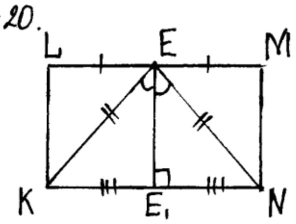
Треугольники KLE и MEN равны по трём сторонам.

Значит, углы KLE и NME равны. Так как их сумма равна 180°, то углы равны 90°. Такой параллелограмм — прямоугольник.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
3	Доказательство верное
2	Доказательство содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям
3	*Максимальный балл*

Пример 1.

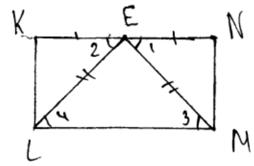
№20.



Дано: KLMN-параллелограмм; $LE=EM$, $EK = EN$.
Доказать: KLMN-прямоугольник.
Доказательство: проведем высоту EE_1 к стороне KN; $\triangle KEN$ – равнобедренный, т.к. $EK=EN \Rightarrow EE_1$ – высота, биссектриса и медиана $\Rightarrow KE_1 = E_1N$, EE_1 – общая сторона и $\angle KE_1E = \angle EE_1N$, т.к. $180°-90=90°$ $\Rightarrow \triangle KEE_1 = \triangle EE_1N$ по 1 признаку; рассмотрим $\triangle KLE$ и $\triangle KEE_1$: $\angle LEK = \angle EKE_1$ т.к. противолежащие по свойству параллельных прямых, KE-общий, и $\angle KEE_1 = \angle LKE \Rightarrow \triangle KLE = \triangle KEE_1$ по 2 признаку, аналогично с $\triangle EE_1N$ и $\triangle EMN \Rightarrow \triangle E_1EN = \triangle EMN \Rightarrow \angle L = \angle E_1 = \angle M = \angle E_1 = 90° \Rightarrow \angle L = \angle M = \angle N = \angle K = 90° \Rightarrow$ KLMN-прямоугольник.

За задание выставляется 0 балл, т.к. отсутствует доказательство равенства углов KEE_1 и LKE, что является существенным моментом предложенного доказательства. Комментарий. Учащийся был введен в заблуждение своим рисунком: если бы он изобразил параллелограмм, а не прямоугольник, этого бы не случилось.

Пример 2.

20


Дано: KLMN - параллелограмм,
KE=EN, EL=EM
Д! KLMN-прямоугольник

Рассмотрим △LKE и △MNE, они равны по двум сторонам и углу между ними: 1) EL=EM (по усл.); 2) KE=EN (по усл.) 3) ∠KEL=∠NEM, т.к. ∠1=∠3 и ∠2=∠4 (накр. лежащие ∠ при парал. прямых), а ∠3=∠4, т.к. △ELM - равнобедр. (видно по рисунку)

Теперь докажем, что ∠L=∠M

1) ∠KLE=∠NME (следует из равенства △)
2) ∠ELM=∠EML (△ELM-равнобедр., ∠3=∠4) } => ∠L=∠M

Значит, ∠K=∠N, ∠L=∠M

Так как данный четырехугольник - параллелограмм, то его противоположные стороны равны, тогда ∠K=∠M, ∠L=∠N => ∠K=∠M=∠L=∠N=90° (сумма ∠ в четырехк. равна 360°). А поскольку все углы в параллелограмме равны 90°, то этот параллелограмм является прямоугольником. Что и требовалось доказать!

Доказательство логично, хорошо структурировано, не содержит пробелов, утверждения аргументированы. За задание выставляется максимальный балл – 3.
Комментарий. 1) Фразу в приведенном доказательстве «видно по рисунку» следует трактовать, как неуклюжее выражение очевидной мысли о том, что заданное в условии задачи условие равенства отрезков *EL* и *EM* отмечено на рисунке, в треугольнике *ELM* стороны *EL* и *EM* равны, следовательно, треугольник *ELM* является равнобедренным.

2) Фразу «его противоположные стороны равны» следует считать опиской, так как далее речь идет об углах параллелограмма.

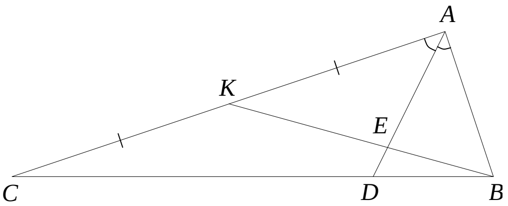
3) Запись «сумма ∠ в четырехк. равна 360°», скорее похожа на шифрограмму, ее, конечно, нельзя признать грамотной, но выраженная таким образом мысль понятна и должна быть засчитана.

Задание 26

1. *Площадь треугольника* ABC *равна 80. Биссектриса* AD *пересекает медиану* BK *в точке* E*, при этом* $BD:CD=1:3$. *Найдите площадь четырёхугольника* $EDCK$.

Ответ: 36.

Решение. Пусть $AK = KC = 3x$, тогда $AB = 2x$, так как $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{3}$ по свойству биссектрисы. Значит, $\frac{BE}{KE} = \frac{2}{3}$.



Пусть S — площадь треугольника ABC, тогда $S_{ACD} = \frac{CD}{CB} \cdot S = \frac{3}{4}S$;

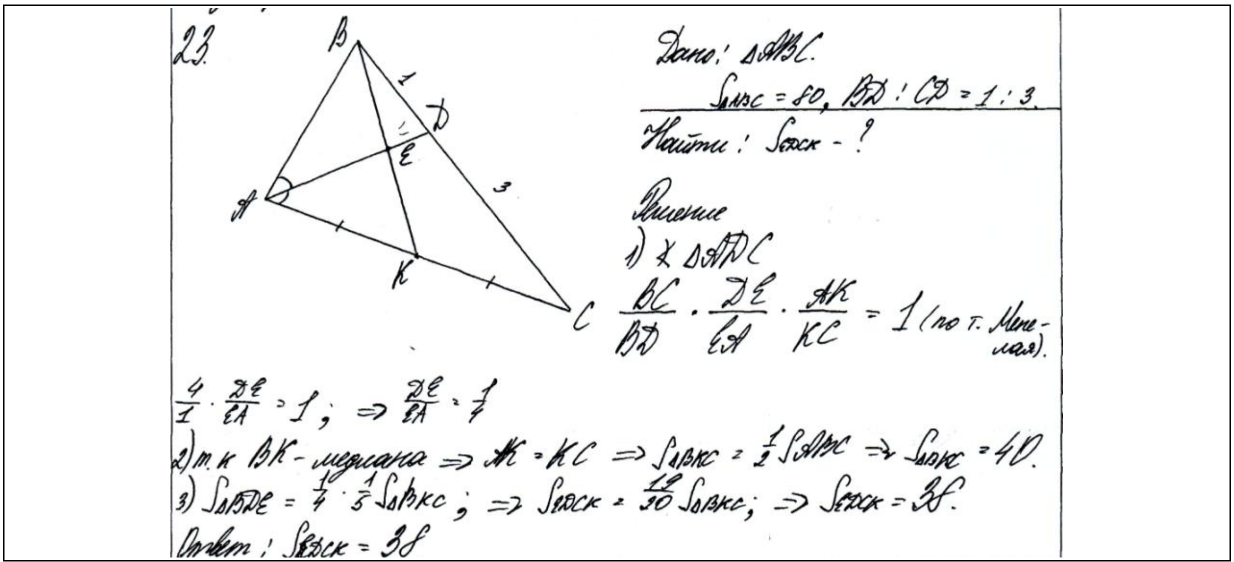
$S_{AKE} = \frac{KE}{BK} \cdot S_{ABK} = \frac{KE}{BK} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot S = \frac{3S}{10}$.

Таким образом, $S_{EDCK} = S_{ACD} - S_{AKE} = \frac{3}{4}S - \frac{3S}{10} = \frac{9}{20}S = 36$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

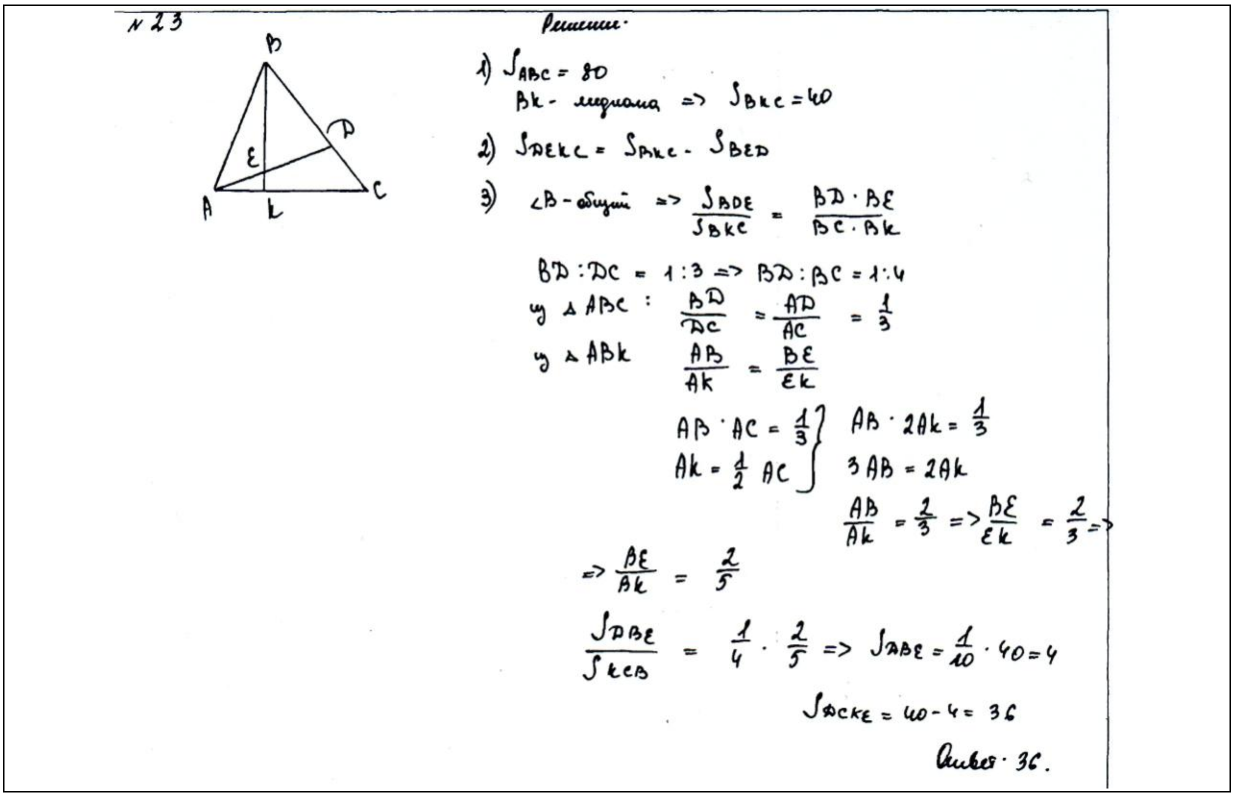

23.

Дано: ΔABC.
$S_{\Delta ABC} = 80$, $BD : CD = 1 : 3$.
Найти: S_{EDCK} - ?

Решение
1) ∠ ΔADC
$\frac{BC}{BD} \cdot \frac{DE}{EA} \cdot \frac{AK}{KC} = 1$ (по т. Менелая).
$\frac{4}{1} \cdot \frac{DE}{EA} = 1$; $\Rightarrow \frac{DE}{EA} = \frac{1}{4}$
2) т.к BK - медиана $\Rightarrow AK = KC \Rightarrow S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow S_{\Delta BKC} = 40$.
3) $S_{\Delta BDE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} S_{\Delta BKC}$; $\Rightarrow S_{EDCK} = \frac{19}{20} S_{\Delta BKC}$; $\Rightarrow S_{EDCK} = 38$.
Ответ: $S_{EDCK} = 38$

На третьем шаге, выражая площадь треугольника BDE через площадь треугольника BKC, ученик допустил ошибку, верна следующая запись: $S_{\Delta BDE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{10} S_{\Delta BKC}$. С учетом этой ошибки решение доведено до конца. За выполнение задания выставляется 3 балла.

Пример 2.


№23

Решение.

1) $S_{ABC} = 80$

Bk - медиана $\Rightarrow S_{BKC} = 40$

2) $S_{DEKC} = S_{BKC} - S_{BED}$

3) $\angle B$ - общий $\Rightarrow \frac{S_{BDE}}{S_{BKC}} = \frac{BD \cdot BE}{BC \cdot Bk}$

$BD : DC = 1:3 \Rightarrow BD : BC = 1:4$

ц $\triangle ABC$: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$

ц $\triangle ABk$ $\frac{AB}{Ak} = \frac{BE}{Ek}$

$AB : AC = \frac{1}{3}$, $Ak = \frac{1}{2} AC$ $\Big\}$ $AB \cdot 2Ak = \frac{1}{3}$, $3AB = 2Ak$

$\frac{AB}{Ak} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BE}{Ek} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BE}{Bk} = \frac{2}{5}$

$\frac{S_{DBE}}{S_{KCB}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow S_{DBE} = \frac{1}{10} \cdot 40 = 4$

$S_{DCKE} = 40 - 4 = 36$

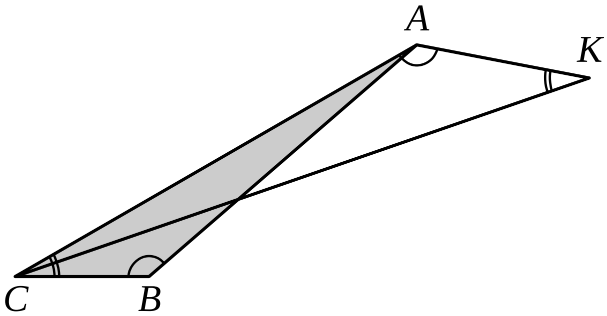
Ответ: 36.

Задание выполнено верно, выставляется 4 балла.

2. *Стороны AC, AB, BC треугольника ABC равны $2\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ и 1 соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC, причем отрезок KC пересекает отрезок AB в точке, отличной от B. Известно, что треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC, если $\angle KAC > 90^\circ$.*

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Решение:



Рассмотрим подобные треугольники ABC и AKC и установим соответствие между их углами.

AC — наибольшая сторона треугольника ABC, а значит, ABC — наибольший угол треугольника ABC. Так как в треугольнике AKC есть тупой угол, то в треугольнике ABC это угол ABC. Следовательно, угол ACB треугольника ABC не равен углу KAC треугольника AKC. Он также не равен углу KCA, т.к. больше его (луч CK проходит между лучами CA и CB). Следовательно, $\angle AKC = \angle ACB$.

По теореме косинусов из треугольника ABC находим:

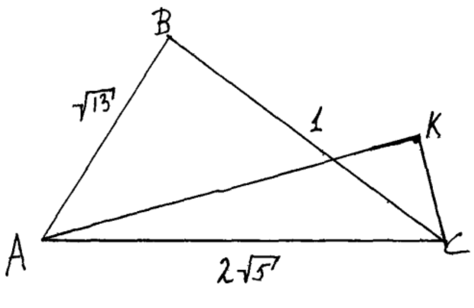
$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{20 + 1 - 13}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Другая возможная запись ответа: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

Пример 1.

№23



Дано:

$\triangle ABC$;

$AC = 2\sqrt{5}$, $AB = \sqrt{13}$; $BC = 1$.

Найти: $\cos\angle AKC$

Решение:

1) т.к. $\triangle AKC$ подобен $\triangle ABC$, то $\angle BAC = \angle KAC$, $\angle ABC = \angle KAC$, $\angle BCA = \angle AKC$

(т.к. против большего угла лежит большая сторона) =>

$\cos\angle ABC = \cos\angle ACB$.

2) Найдем $\cos\angle ACB$, через теорему cos:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB$

$2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB = BC^2 + AC^2 - AB^2$

$\cos\angle AKC = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{1+20-13}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Хотя и получен верный ответ, решение оценивается 0 баллов, так как рисунок не соответствует описанной в условии конфигурации (отрезок *KC* не пересекает *AB*) и не доказано, что угол *AKC* равен углу *ACB*.

3. Материалы для самостоятельной работы экспертов по проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

Задание 21

Сократите дробь $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

Пример 1.

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \frac{(x-1)(x+0{,}4)}{x(5x+2)} = \frac{(x-1)\cancel{(x+0{,}4)}}{5x\cancel{(x+0{,}4)}} =$$

$$= \frac{x-1}{5x}, \quad x \neq -0{,}4$$

Пример 2.

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} =$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot5\cdot2}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{10}$$

$$x_1 = \frac{3+7}{10} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-7}{10} = -\frac{4}{10} \cancel{\frac{2}{5}} = -0{,}4$$

$$\frac{(x-1)(x+0{,}4)}{x(5x+2)}$$

Задание 22

Решите неравенство $(\sqrt{19}-4{,}5)(5-3x)>0$.

Пример 3.

20. $(\sqrt{19}-4{,}5)(5-3x)>0$

$(\sqrt{19})^2 = 19, \quad 4{,}5^2 = 20{,}25$

$5-3x<0$, т. к. $\sqrt{19}-4{,}5<0$

$-3x<-5$

$x > \frac{5}{3} = 1\frac{1}{3}$

$x > 1\frac{1}{3}$

Постройте график функции $y = f(x)$, *где* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3, & \text{åñëè } x < 3, \\ -x + 7, & \text{åñëè } x \geq 3. \end{cases}$ *При каких значениях x функция принимает значения, меньшие* 2?

<u>Пример 4.</u>

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3, & \text{если } x < 3 \\ -x + 7, & \text{если } x \geqslant 3 \end{cases}$

При каких значениях x

$f(x) < 2$

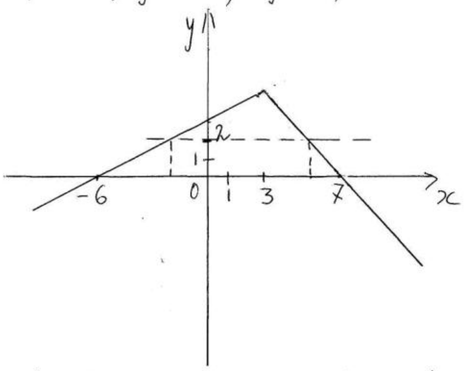
Решение

$f(x) = \frac{1}{3}x + 3$

$x = 0,\ y = 3;\ \cancel{x =}\ y = 0,\ x = -6$

$f(x) = -x + 7;$

$x = 0,\ y = 7;\ y = 0,\ x = 7.$



$f(x) < 2$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (3{,}5; +\infty)$

Найдите область определения выражения $\dfrac{\sqrt{21 + 2x - 3x^2}}{3x - 7}$.

<u>Пример 5</u>.

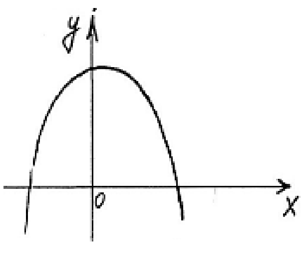
$\dfrac{\sqrt{21 + 2x - 3x^2}}{3x - 7}$

1) $\begin{cases} 21 + 2x - 3x^2 \geq 0, \\ 3x - 7 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3x^2 + 2x + 21 \geq 0, \\ x \neq 2\frac{1}{3}. \end{cases}$

2) Рассм. ф-цию $y = -3x^2 + 2x + 21$.

Функция квадратичная, ветви параболы направлены вниз. Изобразим графически.



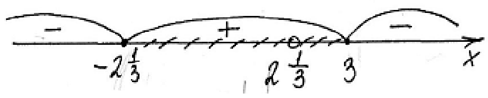
3) Найдем корни, для этого вычислим D.

$$D = 4 - 4\cdot(-3)\cdot 21 = 4 + 12\cdot 21 = 4 + 252 = 256 = 16^2$$

$$x_1 = \frac{-2+16}{-6} = \frac{14}{-6} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-2-16}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

4) $-3\left(x+2\frac{1}{3}\right)(x-3) \geq 0$



$x \in \left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right); \left(2\frac{1}{3}; 3\right]$

Ответ: $x \in \left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right); \left(2\frac{1}{3}; 3\right]$.

Пример 6.

$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$$\begin{cases} 21+2x-3x^2 \geq 0 \\ 3x-7 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(3x-7) \geq 0 \\ 3x-7 \neq 0 \end{cases}$$

$-3x^2+2x+21=0$

$3x^2-2x-21=0$

$D = 4+4\cdot 3\cdot 21 = 256$

$\sqrt{D} = 16$

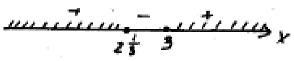
$x_{1,2} = \frac{2 \pm 16}{6}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2\frac{1}{3}$

$3x^2-2x-21 = (x-3)(3x-7)$

Решаем каждое из неравенств методом интервалов.

1. $(x-3)(3x-7) \geq 0$



2. $3x-7 \neq 0$

$x \neq 2\frac{1}{3}$

3.

$x \in \left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$

Ответ: $\left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$

Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии – 8,6; – 8,4; …

Пример 7.

(21) $a_1=-8,6;\ a_2=-8,4;\ d=0,2$

$a_n = \cancel{\ \ } + a_1 + d(n-1) = -8,6 + 0,2(n-1) =$

$= 0,2n - 8,8.$

$a_n < 0;\quad 0,2n - 8,8 < 0$

$0,2n < 8,8$

$n < 44$

$S_{22} = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \dfrac{2\cdot(-8,6) + 0,2\cdot 43}{2} \cdot 44 =$

$= (-17,2 + 8,6)\cdot 22 = -189,2$

Ответ: $-189,2$

Задание 23

Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1, \\ (x+5)((2y-1) = 0. \end{cases}$

Пример 8.

№22

$\begin{cases} 2y^2+x+2y=-1; \\ (x+5)(2y-1)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y^2-2y-1 \\ (-2y^2-2y+4)(2y-1)=0 \end{cases}$

$(-2y^2-2y+4)(2y-1)=0$

$-2y^2-2y+4=0 \ /:(-2)$

$y^2+y-2=0 \qquad x=-2y^2-2y-1$

$y_1=-2 \qquad x_1=-2\cdot(-2)^2-2(-2)-1=-5$

$y_2=1 \qquad x_2=-2\cdot 1^2-2\cdot 1-1=-5$

$2y-1=0 \qquad x_3=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-1=-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}-1=$

$2y=1$

$y_3=\frac{1}{2} \qquad =-2\frac{1}{2}.$

Ответ: $(-5;-2);(-5;1);\left(-2\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$

Пример 9.

№ 22

$$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)(2y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5=0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y-1=0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ 2y^2 - 5 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ 2y^2 + 2y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + x + 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \qquad y^2 + y - 2 = 0 \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x = -2\frac{1}{2} \end{cases}$$

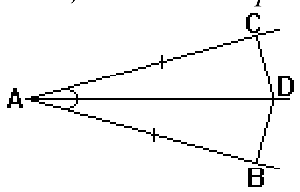
$$D = 1 + 4\cdot 2 = 9 \qquad \sqrt{D} = 3 \qquad y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \qquad y_1 = -2 \quad y_2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases} \\ \cancel{x=4} \\ \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \begin{cases} y=0,5 \\ x=-2,5 \end{cases}$$

Ответ: (-5 ; -2) ; (-5 ; 1) ; (-2,5 ; 0,5)

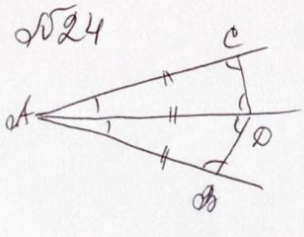
Задание 24

На сторонах угла BAC, равного 20°, и на его биссектрисе отложены равные отрезки AB, AC и AD. Определите величину угла BDC.



Пример 10.

№24



$\angle CAD = \angle CDA = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\angle DAB = \angle BDA = \angle CDA = 80^\circ$

Поэтому $\angle CDA = 80^\circ + 80^\circ = 160^\circ$

Ответ: 160°.

Пример 11.

N24
(по ~~пр.~~ 1 признаку)
$\Delta ACD = \Delta ABD$ – равнобедренные;
$\angle CDA = \angle ACD = (180^\circ - 20^\circ : 2) : 2 = 85^\circ$
$\angle ADB = \angle CDA = 85^\circ \Rightarrow \angle CDB = 85^\circ \cdot 2 = 170^\circ$
Ответ: 170°.

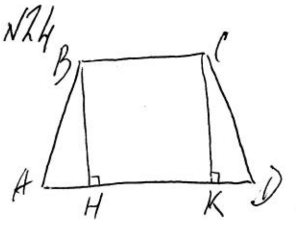
Пример 12.

N24
$\angle CAD = \angle DAB = 20^\circ : 2 = 10^\circ$ (биссектриса);
$\angle CDA = \angle ACD = (180^\circ - 10^\circ) : 2 = 80^\circ$;
аналогично, $\angle ADB = 80^\circ$;
$\angle CDB = 80^\circ \cdot 2 = 160^\circ$.
Ответ: 160°.

2. *Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18, а ее периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.*

Пример 13.

N24



Дано: ABCD – трап, найти:
$AB = CD$
S_{ABCD} – ?
$P = 52$
$AD = 18$, $BC = 8$

Решение:
Проведем высоты BH и CK.
Найдем боковые стороны:
$52 - (8 + 18) = 26$; $26 : 2 = 13$.

$AH = KD = 10 : 2 = 5$
$BH^2 = 169 - 25 = 144$,
$BH = 12$ (по т. Пифагора)

$S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot (8 + 18) \cdot 12 = 156$
Ответ: 156

Пример 14.

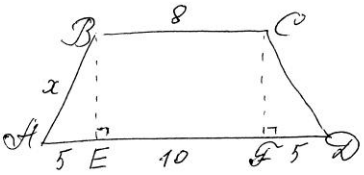
№24

Дано:

ABCD - трапеция,

$AB = CD$, $BC = 8$,

$AD = 18$, $P = 52$.



Найти: S_{ABCD} - ?

Решение: 1) Пусть $AB = x$, $2x+8+18=52$

$2x = 26+52$

$2x = 26$

$x = 13$

2) $EF = BC = 8$

$AE = FD$, $2AE = 18-8 = 10$,

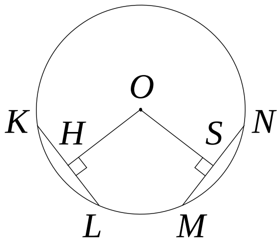
$AE = 5$.

3) $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 169 - 25 = 144$, $BE = 12$.

4) $S = \frac{BC+AD}{2} \cdot BE = \frac{8+18}{2} \cdot 12 = \frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

Задание 25

В окружности с центром O проведены две равные хорды KL и MN. На эти хорды опущены перпендикуляры OH и OS. Докажите, что OH и OS равны.



Пример 15.

Дано: окр-ть с центром в т. O.

KL и MN - хорды; KL = MN

OH и OS - перпендикуляры к хордам

Доказать, что OH = OS

Док-во:

1 Дополнительное построение: OK; OL; OM; ON -

- радиусы => OK = OL = OM = ON

2. Рассмотрим △KOL и △MON.

KL = MN по условию

OK = OL = OM = ON по пункту 1

△KOL = △MON по III признаку

3. OH = OS, как высоты равных треуголь-

ников KOL и MON Что и следовало доказать.

Пример 16.

Дано: $KL = MN$; $OH \perp KL$; $OS \perp MN$.

Доказать: $OH = OS$.

Доказательство.

$\angle KOL = \angle MON$ (центр. углы, опир. на равные хорды);

ΔKOL – равнобедр., т.к. $KO = OL$;

ΔMON – равнобедр., т.к. $MO = ON$;

$\angle KOH = \angle MOS$;

OH – медиана и биссектр. ΔKOL;

OS – медиана и биссектр. ΔMON;

$KH = \frac{1}{2} KL = \frac{1}{2} MN = MS$;

$KO = OM$

$\angle OHK = 90^\circ = \angle OSM$;

$\angle HKO = 180^\circ - \angle KOH - \angle OHK = 180^\circ - \angle MOS - \angle OSM = \angle SMO$

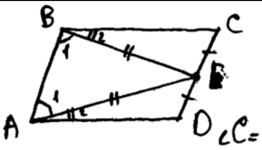
$\Delta KOH = \Delta MOS$ (по 2 стор. и углу между ними)

$OH = OS$, что и требовалось доказать.

В параллелограмме ABCD точка E — середина стороны CD . Известно, что EB = EA. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Пример 17.

№20.

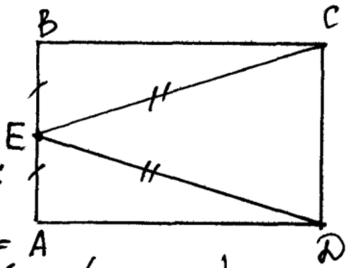


Док-во: рассмотрим ΔABE – равнобедренный, т.к. $EA = EB \Rightarrow \angle BAE = \angle ABE = \angle 1$. т.к. $ABCD$-паралл-мм, то $\angle A = \angle C$, $\angle C = \angle A = \angle 1 + \angle 2$. $\angle CBE = \angle EAD = \angle 2$. $180 = \angle A + \angle B$, $180^\circ = 2(\angle 1 + \angle 2) \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$ABCD$-прямоугольник

В параллелограмме ABCD точка E — середина стороны AB. Известно, что EC = ED. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

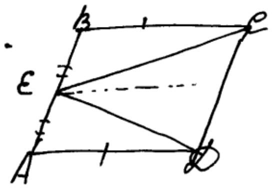
Пример 18.



20. Дано: $ABCD$ – пар-м., $E \in AB$,
$BE = AE$, $EC = ED$
Д-ть: $ABCD$ – прямоугольник.
Д-во: Рассмотрим ΔCBE и ΔDAE:
$BE = AE$ | (по условию)
$EC = ED$ |
$BC = AD$ ($ABCD$ – пар-м.) | $\Rightarrow \Delta CBE = \Delta DAE$ (III признак).
Т.к $\Delta CBE = \Delta DAE \Rightarrow \angle B = \angle A$.
Т.к $ABCD$ – пар-м. $\Rightarrow \angle B + \angle A = 180°$
$\angle B = \angle A = 180° : 2 = 90°$ | $\Rightarrow ABCD$ – прямоугольник.
$\angle B = \angle D$, $\angle D = 90°$
$\angle C = \angle A = 90°$

Пример 19.

20.



Дано: $ABCD$ – пар-мм
$EC = ED$
Док-ть: $ABCD$ – прямоугольник

Док-во: рассмотрим Δ AED и CBE; $EC = ED$ (по условию задачи) AD и BC (по свойству пар-ма $\Rightarrow \Delta$ $AED = BEC$ (по теореме сторона 1) $\Rightarrow \angle B = \angle C$ (как соответств. углы)
$BA \parallel CD$; $\angle B + \angle C = 180°$ (по свойству одностор) секущих $BC \Rightarrow B$ и $C = 90°$
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90° \Rightarrow$ что это прямоугольник

Задание 26

Площадь треугольника ABC равна 90. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD : CD = 2 : 1$. Найдите площадь четырёхугольника $EDCK$.

Пример 20.

Дано:

23.

$S_{\triangle ABC}=90$

AD – биссек.

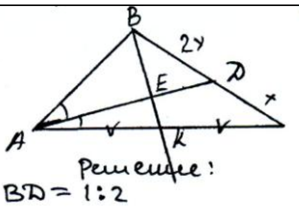
BK – медиана

$AD \cap BK = E$

$BD:CD=2:1$

Найти:

S_{EDCK} – ?



Решение:

$AC:BD=1:2$

$AK:AC=1:2$

Рассмотрим $\triangle CBK$: $\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BE}{EK}\cdot\frac{AK}{AC}=1$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{BE}{EK}\cdot\frac{1}{2}=1 \Rightarrow BE:EK=4:1$

$\frac{S_{EDKC}}{S_{KBC}}=\frac{S_{KBC}-S_{EBD}}{S_{KBC}}=1-\frac{S_{EBD}}{S_{KBC}}=1-\frac{BD\cdot EB}{CB\cdot BK}=1-\frac{2x\cdot 4y}{3x\cdot 5y}=$

$=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$

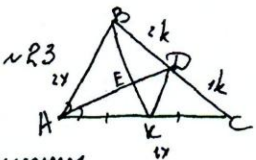
$S_{KBC}:S_{ABC}=\frac{1}{2}$; $S_{EDKC}:S_{KBC}:S_{ABC}=7:15:30 \Rightarrow \frac{S_{EDKC}}{S_{ABC}}=\frac{7}{30}$

$S_{EDKC}=\frac{7}{30}\cdot 90$; $S_{EDKC}=21$

Ответ: $S_{EDKC}=21$

Пример 21.

№23



Дано:

$S_{ABC}=90$

AD – бис

BK – мед

$BD:DC=2:1$

Найти: S_{EDCK} – ?

Решение.

:45

1 BK – мед $\Rightarrow S_{ABK}=S_{BKC}$ (т.к. они равновелики по св-ву медианы)

2 $\frac{AB}{AC}=\frac{2}{1}$ т.к. AD – бис (по св-ву биссектрисы) по ~~св-ву~~ опред. медианы

3 $AK=\frac{1}{2}AC \Rightarrow AK:AC=1:2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AK:AB=1:4$ (из пункта 2 и 3)

4 $\frac{AB}{AK}=\frac{4}{1} \Rightarrow \frac{BE}{EK}=\frac{4}{1}$ (по св-ву бис, т.к. AE – бис $\triangle ABC$ и ABK)

5 $BE:EK=4:1 \Rightarrow S_{ABE}:S_{AEK}=4:1$ (т.к. имеют общую высоту и сторону)

6 Пусть $S_{AKE}=x$, тогда $S_{ABE}=4x$

$5x=45$

$x=9$ $S_{AKE}=9$, $S_{ABE}=36$

7 $S_{\triangle ADK}=S_{\triangle KDC}$ (т.к. $AK=KC$, имеют общую сторону и высоту)

8 Т.к. $AB:AK=4:1$, то пусть $S_{ADK}=x$, тогда $S_{ABD}=4x$ и $S_{\triangle KDC}=x$ (по соотнош. сторон)

$6x=90 \Rightarrow x=15 \Rightarrow S_{\triangle DKC}=15$, $S_{\triangle ADK}=15$

9 $S_{EDCK}=S_{\triangle DKC}+S_{ADK}-S_{\triangle AEK}=15+15-9=24$ Ответ. $S_{EDCK}=24$

Стороны AC, AB, BC треугольника ABC равны $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и 1 соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC, причем отрезок KC пересекает отрезок AB в точке, отличной от B. Известно, что треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC, если $\angle KAC > 90^\circ$.

Пример 22.

3). Дано: $\triangle ABC$

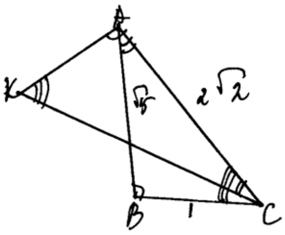
$AC = 2\sqrt{2}$

$AB = \sqrt{5}$

$BC = 1$

$K \in \triangle ABC$

$CK \cap AB \neq B$



треугольник с вершинами K, A, C подобен $\triangle ABC$ $\angle KAC > 90°$.

Найти: $\cos AKC$.

Решение: 1) $\angle KAC > 90°$ (по усл) $\Rightarrow \triangle KAC$ – тупоугольн. Т.к. треугольник с вершинами K, A, C подобен $\triangle ABC$, т.е. $\triangle ABC$ – тупоугольного.

2) $2\sqrt{2} = \sqrt{8} > \sqrt{5} > 1 \Rightarrow AC > AB > BC$. По теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника $\Rightarrow \angle B > 90°$ (т.к. напротив большей стороны лежит больший угол) $\Rightarrow \angle KAC = \angle B$ (т.к. в треуг-ке может быть только один тупой угол).

3) $\angle ACK < \angle ACB$ (т.к. $\angle ACK$ лежит внутри $\angle ACB \Rightarrow \angle ACK = \angle BAC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle K = \angle BAC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CAK \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CK} = \frac{BC}{AK} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{CK} = \frac{1}{AK} \Rightarrow CK = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$; $AK = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

4) По теореме косинусов из $\triangle AKC$:

$AC^2 = AK^2 + KC^2 - 2AK\cdot KC\cos AKC \Rightarrow \cos AKC = \frac{AK^2 + KC^2 - AC^2}{2AK\cdot KC}$,

$$\cos AKC = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - (2\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{8}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{8}{5} + \frac{64}{5} - 8}{\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot 8}{5}} =$$

$$= \frac{8 + 64 - 8\cdot 1}{24\sqrt{2}} = \frac{24}{24\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\cos AKC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Рекомендуемая оценка решений учащихся

Пример 1. Допущена ошибка при разложении квадратного трехчлена на множители. Решение оценивается 1 баллом.

Пример 2. Допущена ошибка при разложении квадратного трехчлена на множители. Дробь не сокращена. Решение оценивается 0 баллов.

Пример 3. Допущена вычислительная ошибка при делении, поэтому снимается один балл, решение оценивается 2 баллами.

Пример 4. При вычислении координат точек графика допущена ошибка, неверно построен график. За решение выставляется 0 баллов.

Пример 5. Ошибка в символической записи ответа; решение можно оценить 2 баллами.

Пример 6. Допущена ошибка в алгоритме решения квадратного неравенства и вычислительная ошибка при вычислении корней квадратного трехчлена. За решение выставляется 0 баллов (видно, что учащийся что-то знает, но нет твердого владения базовыми алгоритмами).

Пример 7. Неправильно определено число суммируемых членов; выставляется 0 баллов.

Пример 8. Решение оценивается 4 баллами. За нерациональное решение баллы не снимаются.

Пример 9. Допущена погрешность в употреблении символики. Решение оценивается 3 баллами.

Пример 10. Допущена ошибка на первом же шаге решения - не учтено условие, что AD – биссектриса угла A. Выставляется 0 баллов.

Пример 11. Доказательство верное. Выставляется максимальный балл - 2.

Пример 12. Решение в целом верно, но допущена вычислительная ошибка. Решение оценивается 1 баллом.

Пример 13. Решение верное, оценивается 2 баллами.

Пример 14. Решение в целом верно, но допущена вычислительная ошибка. Решение оценивается 1 баллом.

Пример 15. В доказательстве опущено слово «соответственные». При этом доказательство можно оценить 2 баллами.

Пример 16. Доказательство громоздкое, но верное. Выставляется максимальный балл - 3.

Пример 17. Решение содержит существенный пробел – не доказано равенство углов CBE и ADE. Выставляется 0 баллов.

Пример 18. Доказательство верное, оценивается 3 баллами.

Пример 19. Доказательство содержит неверные утверждения, оценивается 0 баллов.

Пример 20. Отсутствуют пояснения и ссылки на теоремы. Решение оценивается 3 баллами.

Пример 21. Допущена вычислительная ошибка на последнем шаге. Решение оценивается 3 баллами.

Пример 22. Решение верное, выставляется 4 балла.