Контрольные измерительные материалы по математике

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания B1–B10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания B11–B15 и C1–C6) базового, повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий B1–B15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 1

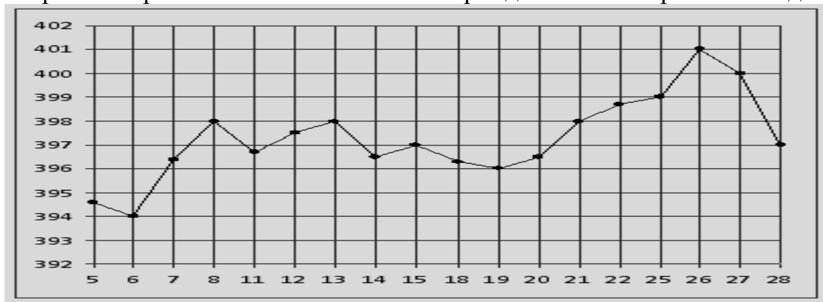
Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Маша отправила SMS-сообщения с новогодними поздравлениями своим 14 друзьям. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 50 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Маши было 85 рублей. Сколько денег останется у Маши после отправки всех сообщений? Ответ запишите в рублях.

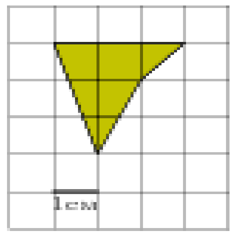
B2 Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 20% ?

B3 На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов в рабочие дни марта 1996 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена золота на момент закрытия торгов была наибольшей за период с 8 по 25 марта 1996 года.



B4 Вася загружает на свой компьютер из Интернета файл размером 30 Мб за 29 секунд. Петя загружает файл размером 24 Мб за 23 секунды, а Миша загружает файл размером 32 Мб за 31 секунду. Сколько секунд будет загружаться файл размером 480 Мб на компьютер с наименьшей скоростью загрузки?

B5 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B6 На семинар приехали 7 ученых из Норвегии, 3 из Финляндии, 5 из Швеции и 2 из России. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим окажется доклад ученого из России. Результат округлите до сотых.

B7 Решите уравнение $\frac{2x+4}{x+4}=\frac{7-x}{x+4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму корней.

B8 В треугольнике ABC угол A равен 78^0, биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

B9 Прямая $y=-4x+1$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

B10 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BB_1=7$, $AB=4$, $AD=4$. Найдите длину диагонали DB_1.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11 Найдите значение выражения $\sqrt{48}\cdot ctg\frac{5\pi}{4}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}$.

B12 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t)=T_0+at+bt^2$, где $T_0=40k$, $a=44k/мин$, $b=-0{,}4k/мин^2$. Известно, что при температурах нагревателя свыше $1000k$ прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

B13 В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точка R — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что AB = 1, а SR = 2. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

B14 Из A в B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 60 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 18 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

B15 Найдите точку минимума функции $y=1+18x-\frac{8x^3}{3}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\sin x+\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi,\ \frac{11\pi}{4}\right)$.

C2 Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases}|x+2|-x\cdot|x|\le 0\\ (x^2-x-6)\cdot\sqrt{8-x}\le 0\end{cases}$

C4 В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся сторон AB и BC в точках соответственно K и M, а стороны AC в точке T, причём $AT=r$.

а) Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника KBM, если известно, что $r=5$ и TC = 15.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{ax^3+3ax-a+1}{x^3+3x-1`}=2$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

C6 Несколько различных натуральных чисел, в десятичной записи которых отсутствуют цифры 1 и 9, составляют арифметическую прогрессию.

а) Может ли сумма всех членов такой прогрессии быть равной 298?

б) Может ли в такой прогрессии быть 35 членов?

в) Покажите, что если разность этой арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, то количество членов прогрессии не превосходит 18.

г) Приведите пример, когда разность арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, а количество членов прогрессии равно 18.

Контрольные измерительные материалы по математике

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания B1–B10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания B11–B15 и C1–C6) базового, повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий B1–B15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 2

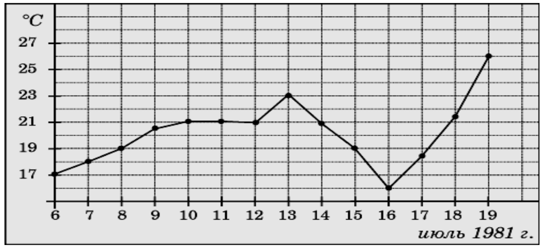
Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить 25 литров бензина. Цена бензина 33 руб. 20 коп. за литр. Сколько рублей сдачи получил клиент?

B2 Розничная цена учебника 150 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 10000 рублей?

B3 На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Иркутске каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период температура была не более 19^0C .



B4 Для транспортировки 27 тонн груза на 300 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	2500	2
Б	4500	5
В	6500	8

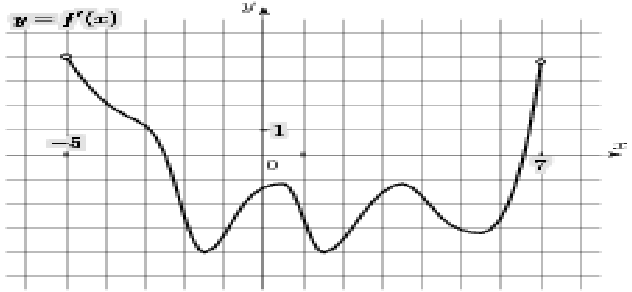
B5 Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2, -2) , (8, -4) , (8, 8) , (2, 10) .

B6 В торговую сеть поступила партия сумок. На каждые 100 качественных сумок приходится 10 сумок с дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Ответ округлите до сотых.

B7 Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{2-4x}}=0{,}5$.

B8 В треугольнике ABC угол A равен 74^0, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

B9 На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-5 , 7) . Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму всех целых точек, входящих в эти промежутки.



B10 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π , а радиус основания равен 6. Найдите высоту цилиндра. (*площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению периметра основания на высоту*)

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11 Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\sin\left(\dfrac{11}{4}\pi\right)\cdot\cos\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)}$.

B12 К источнику с ЭДС $\varepsilon=55$ В и сопротивлением $r=0{,}5$ Ом , подключают нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U=\dfrac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки (в Омах) напряжение на ней будет не менее 50 В?

B13 Высота конуса равна 24 , а диаметр основания равен 14 . Найдите образующую конуса.

B14 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 60 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 11 км/ч , стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 16 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

B15 Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-3x+3$ на отрезке [0 , 9] .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x+\sin x=2\cos x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$.

C2 Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2 , пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84 . Найдите радиус шара.

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases}|x-6|+(x-4)\cdot|4-x|\le 0\\ \left(x^2-7x+6\right)\cdot\sqrt{4+x}\le 0\end{cases}$

C4 Точка P – середина стороны AB треугольника ABC , точка T – середина стороны BC треугольника ABC , O – точка пересечения биссектрисы угла B и серединного перпендикуляра к стороне AC .
а) Докажите, что четырёхугольник ABCO – вписанный в окружность.
б) Найдите площадь треугольника OPT , если AC = 8 , CO = 5 , а произведение сторон AB и BC равно 25 .

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\dfrac{2ax^3+ax-a+1}{2x^3+x-1}=3$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

C6 Даны $n\ge 5$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 30 ?
б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 2014 ?
в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 144 .

Контрольные измерительные материалы по математике

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания B1–B10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания B11–B15 и C1–C6) базового, повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий B1–B15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 3

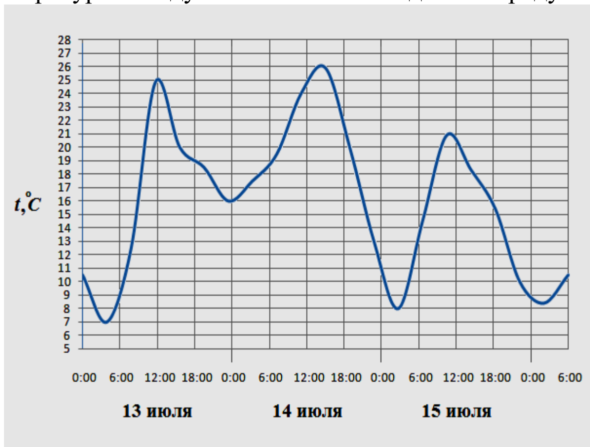
Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 У Маши на счету мобильного телефона был 161 рубль, а после разговора с Леной осталось 126 рублей. Сколько минут длился разговор с Леной, если одна минута разговора стоит 3 рубля 50 копеек.

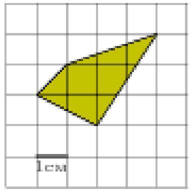
B2 Среди 600000 жителей города 80% не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 50% смотрели по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрели этот матч по телевизору?

B3 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B4 В среднем гражданин А в дневное время расходует 150 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 50 кВт·ч электроэнергии. Раньше у А в квартире был установлен однотарифный счетчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,4 руб. за кВт·ч. Год назад А установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,5 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 1,5 руб. за кВт·ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы А за этот период, если бы не поменялся счетчик? Ответ дайте в рублях.

B5 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

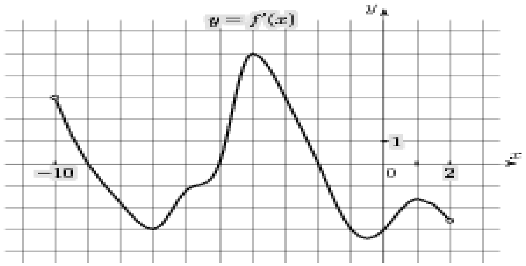


B6 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не менее 8 очков. Результат округлите до сотых.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{4-4x}=-2$.

B8 В треугольнике ABC угол A равен 76^0, биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

B9 На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10,\ 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=x+1$ или совпадает с ней.



B10 Найдите квадрат расстояния между вершинами B и B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCTA_1B_1C_1T_1$, если $AB=3$, $AT=7$, $CA_1=8$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11 Найдите значение выражения $\dfrac{6\sin\left(132^0\right)}{\sin 48^0\cdot\cos 240^0}$.

B12 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=2+7t-5t^2$ м. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более четырёх метров.

B13 Площадь боковой поверхности цилиндра равна π, а диаметр основания равен 1 . Найдите высоту цилиндра. (*площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению периметра основания на высоту*)

B14 Катер в 12:30 вышел из пункта A в пункт B, расположенный в 30 км от A. Пробыв в пункте B 160 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 20:30. Определите (в км/час) собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

B15 Найдите наибольшее значение функции $y=2^{-1-4x-x^2}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $2\cos 2x+4\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi,\ -\pi\right]$.

C2 Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2 , пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84 . Найдите радиус шара.

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases}\left|x+2\right|-x\cdot|x|\le 0\\ \left(x^2-x-6\right)\cdot\sqrt{8-x}\le 0\end{cases}$

C4 В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся сторон AB и BC в точках соответственно K и M , а стороны AC в точке T , причём $AT=r$.
а) Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника KBM, если известно, что $r=2$ и $TC=10$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{ax^3+3ax-a+1}{x^3+3x-1`}=2$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

C6 Несколько различных натуральных чисел, в десятичной записи которых отсутствуют цифры 1 и 9 , составляют арифметическую прогрессию.
а) Может ли сумма всех членов такой прогрессии быть равной 298 ?
б) Может ли в такой прогрессии быть 35 членов?
в) Покажите, что если разность этой арифметической прогрессии не меньше 4 , но не больше 8 , то количество членов прогрессии не превосходит 18 .
г) Приведите пример, когда разность арифметической прогрессии не меньше 4 , но не больше 8 , а количество членов прогрессии равно 18 .

Контрольные измерительные материалы по математике
Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) базового, повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 4

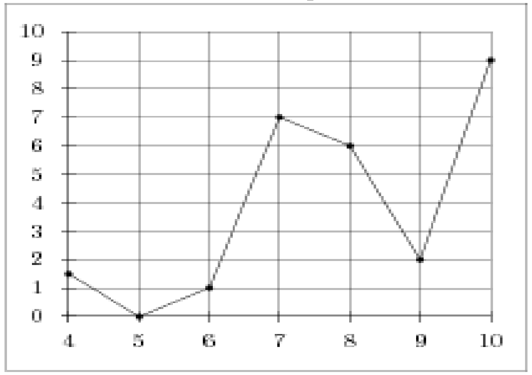
Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Для приготовления вишневого варенья на 1 кг вишни нужно 1,5 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 17 кг вишни?

B2 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 100 рублей за штуку и продает с наценкой 15% . Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 2000 рублей?

B3 На рисунке изображен график осадков в г.Калининграде с 4 по 10 февраля 1974 г. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — осадки в мм. Определите

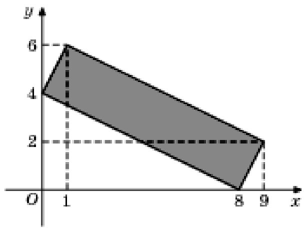


по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало не более 6 мм осадков.

B4 Строительной фирме нужно приобрести 25 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	5000 руб.	9000 руб.	
Б	6000 руб.	10000 руб.	При заказе на сумму больше 180000 руб. доставка бесплатно
В	5500 руб.	10000 руб.	При заказе на сумму больше 100000 руб. доставка бесплатно

B5 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке.



B6 В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что герб выпадет не менее двух раз.

B7 Решите уравнение $\sqrt{6-10x}=5+x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму корней.

B8 В треугольнике ABC угол A равен 56^0, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

B9 Прямая $y=-3x+a$ является касательной к графику функции $f(x)=2x^2-x+3$. Найдите ординату точки касания.

B10 Высота конуса равна 21, а образующая равна 35. Найдите диаметр основания конуса.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11 Найдите значение выражения $\sqrt{108}\cdot\cos(-210^0)$.

B12 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=30$ м/с? Считайте, что $g=10$ м/с^2.

B13 В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания ABC пересекаются в точке M. Найдите объем пирамиды, если AS = 4, MS = $2\sqrt{3}$.

B14 На изготовление 48 деталей первый рабочий затрачивает на 1 час меньше, чем второй рабочий на изготовление 49 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь меньше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

B15 Найдите точку минимума функции $y=8-x(x-12)^2$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

C2 Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases}|x-6|+(x-4)\cdot|4-x|\le 0\\ (x^2-7x+6)\cdot\sqrt{4+x}\le 0\end{cases}$

C4 Точка P – середина стороны AB треугольника ABC, точка T – середина стороны BC треугольника ABC, O – точка пересечения биссектрисы угла B и серединного перпендикуляра к стороне AC.
а) Докажите, что четырёхугольник ABCO – вписанный в окружность.
б) Найдите площадь треугольника OPT, если AC = 24, CO = 13, а произведение сторон AB и BC равно 169.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{2ax^3+ax-a+1}{2x^3+x-1}=3$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

C6 Даны $n\ge 5$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 30?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 2014?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 144.

Вариант 1

C1 а) Решите уравнение $\sin x+\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi, \frac{11\pi}{4}\right)$.

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, где $n\in Z$.

б) $x_1=-\frac{5\pi}{4}$, $x_2=-\frac{\pi}{4}$, $x_3=\frac{3\pi}{4}$, $x_4=\frac{7\pi}{4}$.

Решение.

а) Так как $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=-\cos x$, то исходное уравнение примет вид $\sin x=-\cos x$, откуда $\mathrm{tg}x=-1$ и $x=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, где $n\in Z$.

б) Поделив на $\frac{\pi}{4}$ все члены двойного неравенства $-2\pi\le-\frac{\pi}{4}+n\pi<\frac{11\pi}{4}$, получим: $-8\le-1+4n<11$. Отсюда находим, что $n=-1$, 0 , 1 или 2 . Поэтому $x_1=-\frac{5\pi}{4}$, $x_2=-\frac{\pi}{4}$, $x_3=\frac{3\pi}{4}$, $x_4=\frac{7\pi}{4}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	Критерии оценивания задания C1
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C2 Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7 . Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5 . Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

Ответ: 12 .

Решение. Проведём сечение плоскостью, проходящей через центр шаров O перпендикулярно плоскостям α и β . Получим окружности с общим центром O и две параллельные хорды AB и CT большей окружности, причём хорда AB касается меньшей окружности в точке K , а хорда CT пересекает меньшую окружность в точках P и M . Обозначим за H точку пересечения CT и OK . Искомая площадь сечения большего шара плоскостью α равна πCH^2 . Из условий задачи следует, что $\pi\left(OP^2-OH^2\right)=7$, а $\pi\left(OA^2-OK^2\right)=5$. Складывая эти уравнения и учитывая, что $OP=OK$ и $OA=OC$, получим: $\pi\left(OC^2-OH^2\right)=\pi CH^2=12$.

Баллы	Критерии оценивания задания C2
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ ИЛИ решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases}\left|x+2\right|-x\cdot|x|\le 0\\ \left(x^2-x-6\right)\cdot\sqrt{8-x}\le 0\end{cases}$

Ответ: $2\le x\le 3$ или $x=8$.

Решение. ОДЗ: $8-x\ge 0$. Рассмотрим второе неравенство системы. Если $8-x=0$, то $x=8$ и оба неравенства системы выполняются. Если же $8-x>0$, то $x<8$ и $x^2-x-6\le 0$, откуда $-2\le x\le 3$. При $-2\le x<0$ первое неравенство системы имеет вид: $x^2+x+2\le 0$; решений нет. При $0\le x\le 3$ первое неравенство системы имеет вид: $-x^2+x+2\le 0$. Поэтому $x^2-x-2\ge 0$, так что $x\le -1$ или $x\ge 2$. Таким образом, множество решений исходной системы неравенств имеет вид: $2\le x\le 3$ или $x=8$.

Замечание. Ход решения может быть другим. Например, решая сначала первое неравенство, получаем: $|x+2|\le x\cdot|x|$, откуда $x\ge 0$ и, следовательно, $x+2\le x\cdot x$, $-x^2+x+2\le 0$. Поэтому $x^2-x-2\ge 0$ и $x\ge 0$, так что $x\ge 2$. И так далее.

Баллы	Критерии оценивания задания C3
3	Обоснованно получен правильный ответ
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы
1	Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется

	верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С4 В треугольник АВС вписана окружность радиуса r, касающаяся сторон АВ и ВС в точках соответственно К и М, а стороны АС в точке Т, причём АТ $= r$.
а) Докажите, что треугольник АВС – прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника КВМ, если известно, что $r = 5$ и ТС = 15.

Ответ: б) 40 .

Решение.

а) Центр О вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника АВС, поэтому угол ОАК равен углу ОАТ. Радиус ОТ – перпендикуляр к касательной АС. Кроме того, из условия АТ $= r$ следует, что треугольник ОАТ – равнобедренный. Поэтому каждый из углов ОАТ, АОТ, ОАК равен 45^0, так что угол ТАК равен 90^0.

б) Обозначим за x отрезок ВК. Тогда ВМ = ВК $= x$, СМ = СТ = 15, АК = АТ = 5, АС = АТ + СТ = 20, АВ = АК + КВ $= x + 5$, ВС $= x + 15$. По теореме Пифагора: $(x+15)^2 = (x+5)^2 + 20^2$. Отсюда находим, что $x = 10$ и АВ $= x + 5 = 15$. Площадь треугольника АВС равна половине произведения 15 на 20, то есть 150. С другой стороны, площадь треугольника АВС равна половине произведения ВА на ВС и на синус угла С, а площадь треугольника КВМ равна половине произведения ВК на ВМ и на синус угла С. Поэтому площадь треугольника КВМ равна произведению площади треугольника АВС на отношение ВК к ВА и на отношение ВМ к ВС, то есть равна $150 \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{25} = 40$.

Баллы	Критерии оценивания задания С4
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ Имеется верное доказательство пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ При обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{ax^3+3ax-a+1}{x^3+3x-1`}=2$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

Ответ: $a<2$ или $a \ge 3$.

Решение. Обозначив $x^3+3x-1=y$, перепишем исходное уравнение в виде $\frac{ay+1}{y}=2$. Так как $y'=3x^2+3>0$, то при $x \ge 0$ функция $y=x^3+3x-1$ возрастает от $y(0)=-1$ до $+\infty$. Поэтому исходная задача сводится к следующей: «найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{ay+1}{y}=2$ имеет хотя бы одно решение в области $y \ge -1$». Уравнение $\frac{ay+1}{y}=2$ перепишется в виде $(a-2)y=-1$. Оно не имеет решений при $a=2$, а при $a \ne 2$ имеет единственное решение $y=\frac{1}{2-a}$. Решая неравенство $\frac{1}{2-a} \ge -1$, получим: $\frac{1}{2-a}+1 \ge 0$, $\frac{3-a}{2-a} \ge 0$, $a<2$ или $a \ge 3$.

Замечание. Задачу можно решить и по-другому, например, графическим методом.

Баллы	Критерии оценивания задания С5
4	Обоснованно получен правильный ответ
3	С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек
2	С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a
1	С помощью верного рассуждения получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С6 Несколько различных натуральных чисел, в десятичной записи которых отсутствуют цифры 1 и 9, составляют арифметическую прогрессию.
а) Может ли сумма всех членов такой прогрессии быть равной 298 ?
б) Может ли в такой прогрессии быть 35 членов?
в) Покажите, что если разность этой арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, то количество членов прогрессии не превосходит 18 .
г) Приведите пример, когда разность арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, а количество членов прогрессии равно 18 .

Ответ: а) да; б) да.

Решение. Можно считать арифметическую прогрессию возрастающей. Тогда её первый член a и разность d являются натуральными числами.

а) Да, может. Например: $73 + 74 + 75 + 76 = 298$.

б) Да, может. Например: 20, 22, 24, …, 88. Эта арифметическая прогрессия содержит ровно $1+\frac{88-20}{2}=35$ членов, причём в десятичной записи каждого из них отсутствуют цифры 1 и 9.

в) Пусть разность этой арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8. Так как цифра десятков и цифра единиц не может быть равна 1 или 9, , а разность прогрессии не меньше 4 и не больше 8, то всякий раз при добавлении этой разности к члену этой прогрессии цифра десятков или не меняется, или увеличивается на 1. Поэтому две последние цифры членов этой прогрессии могут измениться, самое большее, с 20 до 88, то есть на 68. А тогда количество членов прогрессии не превосходит $1+\frac{88-20}{4}=18$.

г) 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88.

Баллы	**Критерии оценивания задания C6**
4	Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты
3	Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
2	Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
1	Верно получен один из следующих результатов: — верный пример в пункте а), — верный пример в пункте б), — верное и полное доказательство утверждения пункта в), — верный пример в пункте г),
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Вариант 2

$\boxed{\text{С1}}$ а) Решите уравнение $\sin 2x + \sin x = 2\cos x + 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$.

Ответ: а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где $n, k \in Z$.

б) $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, $x_3 = -\frac{4\pi}{3}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

а) Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то исходное уравнение примет вид $\sin x(2\cos x + 1) = 2\cos x + 1$, откуда $\cos x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$, так что $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

б) Решая двойные неравенства $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \le 2\pi$, $-\frac{3\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} + 2m\pi \le 2\pi$, $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le 2\pi$, получим: $-9 < -4 + 12n \le 12$, $-9 < 4 + 12m \le 12$, $-3 < 1 + 4k \le 4$. Отсюда находим, что $n = 0$ или 1 , $m =$ -1 или 0 , $k = 0$. Поэтому $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, $x_3 = -\frac{4\pi}{3}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	Критерии оценивания задания С1
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

$\boxed{\text{С2}}$ Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2 , пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно $0{,}84$. Найдите радиус шара.

Ответ: 5 .

Решение. Проведём сечение плоскостью, проходящей через центр шаров O перпендикулярно данным плоскостям. Получим окружности с общим центром O , диаметр AB большей окружности и параллельную AB хорду CT большей окружности. Обозначим ещё за x радиус шара, а за H – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на хорду CT . Из условий задачи следует, что $\mathrm{OH} = 2$, а $\pi\mathrm{CH}^2 : \pi\mathrm{OA}^2 = \left(x^2 - 2^2\right) : x^2 = 0{,}84$. Отсюда находим, что $x^2 - 4 = 0{,}84x^2$, $0{,}16x^2 = 4$ и $x = 5$.

Баллы	Критерии оценивания задания С2
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ ИЛИ решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

$\boxed{\text{С3}}$ Решите систему неравенств $\begin{cases} |x - 6| + (x - 4)\cdot|4 - x| \le 0 \\ \left(x^2 - 7x + 6\right)\cdot\sqrt{4 + x} \le 0 \end{cases}$

Ответ: $1 \le x \le 2$ или $x = -4$.

Решение. ОДЗ: $4 + x \ge 0$. Рассмотрим второе неравенство системы. Если $4 + x = 0$, то $x = -4$ и оба неравенства системы выполняются. Если же $4 + x > 0$, то $x > -4$ и $x^2 - 7x + 6 \le 0$, откуда $1 \le x \le 6$. При $4 \le x \le 6$ первое неравенство системы имеет вид: $-x + 6 + (x - 4)(-4 + x) \le 0$, то есть $x^2 - 9x + 22 \le 0$; решений нет. При $1 \le x < 4$ первое неравенство системы имеет вид: $-x + 6 + (x - 4)(4 - x) \le 0$, то есть $x^2 - 7x + 10 \ge 0$, так что $x \le 2$ или $x \ge 5$. Таким образом, множество решений исходной системы неравенств имеет вид: $1 \le x \le 2$ или $x = -4$.

Замечание. Ход решения может быть другим. Например, решая сначала первое неравенство, получаем: $|x - 6| \le (4 - x)\cdot|4 - x|$, откуда $x \le 4$ и, следовательно, $-x + 6 \le (4 - x)\cdot(4 - x)$. Поэтому $x^2 - 7x + 10 \ge 0$ и $x \le 4$, так что $x \le 2$. И так далее.

Баллы	Критерии оценивания задания С3
3	Обоснованно получен правильный ответ
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы
1	Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется

	верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

$\boxed{\text{C4}}$ Точка P – середина стороны AB треугольника ABC , точка T – середина стороны BC треугольника ABC , O – точка пересечения биссектрисы угла B и серединного перпендикуляра к стороне AC .
а) Докажите, что четырёхугольник ABCO – вписанный в окружность.
б) Найдите площадь треугольника OPT , если $AC = 8$, $CO = 5$, а произведение сторон AB и BC равно 25 .

Ответ: б) 9 .

Решение.

а) Пусть K – середина отрезка AC , а O_1 – точка пересечения перпендикуляра к AC в точке K и описанной окружности треугольника ABC (точки B и O_1 лежат по разные стороны от прямой AC) . Тогда дуги AO_1 и CO_1 равны. Поэтому BO_1 – биссектриса угла B треугольника ABC, точка O_1 совпадает с точкой O и четырёхугольник ABCO – вписанный в окружность.

б) Обозначим: угол ABC равен 2α , $AK = KC = a$, $OK = b$, c – произведение сторон AB и BC , h – высота треугольника ABC , опущенная из B на AC . Тогда каждый из углов ABO , CBO , KAO и KCO равен α , $b=\sqrt{\mathrm{CO}^2-a^2}$, а PT – средняя линия треугольника ABC . Поэтому $PT = a$, а площадь треугольника OPT равна $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(b+\frac{h}{2}\right)$. А так как площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h$ и она же равна $\frac{1}{2}\cdot c\cdot\sin 2\alpha = c\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{abc}{a^2+b^2}$, то $h=\frac{bc}{a^2+b^2}=\frac{bc}{\mathrm{CO}^2}$. Поэтому площадь треугольника OPT равна $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(b+\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(b+\frac{bc}{2\mathrm{CO}^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(3+\frac{3\cdot 25}{2\cdot 5^2}\right)=9$.

Баллы	Критерии оценивания задания C4
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ Имеется верное доказательство пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ При обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а) , при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

$\boxed{\text{C5}}$ Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{2ax^3+ax-a+1}{2x^3+x-1}=3$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

Ответ: $a<3$ или $a\ge 4$.

Решение. Обозначив $2x^3+x-1=y$, перепишем исходное уравнение в виде $\frac{ay+1}{y}=3$. Так как $y'=6x^2+1>0$, то при $x\ge 0$ функция $y=2x^3+x-1$ возрастает от $y(0)=-1$ до $+\infty$. Поэтому исходная задача сводится к следующей: «найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{ay+1}{y}=3$ имеет хотя бы одно решение в области $y\ge -1$ ». Уравнение $\frac{ay+1}{y}=3$ перепишется в виде $(a-3)y=-1$. Оно не имеет решений при $a=3$, а при $a\ne 3$ имеет единственное решение $y=\frac{1}{3-a}$. Решая неравенство $\frac{1}{3-a}\ge -1$, получим: $\frac{1}{3-a}+1\ge 0$, $\frac{4-a}{3-a}\ge 0$, $a<3$ или $a\ge 4$.

Замечание. Задачу можно решить и по-другому, например, графическим методом.

Баллы	Критерии оценивания задания C5
4	Обоснованно получен правильный ответ
3	С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек
2	С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a
1	С помощью верного рассуждения получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C6 Даны $n \geq 5$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 30?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 2014?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 144.

Ответ: а) да; б) 62; в) $n = 6$, 8, 9 или 12.

Решение. Можно считать арифметическую прогрессию возрастающей. Тогда её первый член a и разность d являются натуральными числами.

а) Да, может. Например: $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$.

б) Если сумма арифметической прогрессии фиксирована, то количество n членов арифметической прогрессии тем больше, чем меньше её первый член a и её разность d. Точнее: $\left(a + \frac{n-1}{2} \cdot d\right) \cdot n = S_n \leq 2014$, откуда $\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot 1\right) \cdot n \leq 2014$, $(n+1) \cdot n \leq 4028$ и $n \leq 62$. Последовательность 1, 2, 3, …, 62 содержит ровно 62 члена, а сумма этой прогрессии $\left(1 + \frac{62-1}{2} \cdot 1\right) \cdot 62 = 1953$ не превосходит 2014.

в) Если сумма этой прогрессии равна 144, то $\left(a + \frac{n-1}{2} \cdot d\right) \cdot n = 144$, откуда получаем, что $\left(2a + (n-1) \cdot d\right) \cdot n = 288 = 2^5 \cdot 3^2$ и $\left(2 + (n-1) \cdot 1\right) \cdot n \leq 288$. Поэтому $n \leq 16$ и $288 = 2^5 \cdot 3^2 \,\vdots\, n$. Следовательно, с учётом неравенства $n \geq 5$ возможны только следующие значения n: 6, 8, 9, 12 и 16. Проверим каждое из них.

При $n = 6$ получаем $2a + 5d = 48$ и подходит, например, такая последовательность: 19, 21, 23, 25, 27, 29.

При $n = 8$ получаем $2a + 7d = 36$ и подходит, например, такая последовательность: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.

При $n = 9$ получаем $2a + 8d = 32$ и подходит, например, такая последовательность: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28.

При $n = 12$ получаем $2a + 11d = 24$ и подходит, например, такая последовательность: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

При $n = 16$ получаем $2a + 15d = 18$, откуда заключаем, что натуральное число d чётно и не больше 1, а таких натуральных чисел нет. Поэтому случай $n = 16$ невозможен.

Баллы	**Критерии оценивания задания C6**
4	Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты
3	Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
2	Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
1	Верно получен один из следующих результатов: — верный пример в пункте а), — верные и обоснованные оценка и пример в пункте б), — приведены верные примеры на каждое из возможных значений n в пункте в), — показано, что все другие значения n в пункте в) не подходят.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Вариант 3

С1 а) Решите уравнение $2\cos 2x+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi,\ -\pi]$.

Ответ: а) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, где $n\in Z$.

б) $x_1=-\frac{8\pi}{3}$, $x_2=-\frac{4\pi}{3}$.

Решение.

а) Так как $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$, а $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, то исходное уравнение примет вид $4\cos^2 x-4\cos x-3=0$, откуда $\cos x=-\frac{1}{2}$ или $\cos x=\frac{3}{2}>1$, так что $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$.

б) Решая двойные неравенства $-3\pi\le-\frac{2\pi}{3}+2n\pi\le-\pi$ и $-3\pi\le\frac{2\pi}{3}+2m\pi\le-\pi$, где $n,m\in Z$, получим: $-9\le-2+6n\le-3$ и $-9\le2+6m\le-3$. Отсюда находим, что $n=-1$, $m=-1$. Поэтому $x_1=-\frac{8\pi}{3}$, $x_2=-\frac{4\pi}{3}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	Критерии оценивания задания С1
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С2 Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2 , пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84 . Найдите радиус шара.

Ответ: 5 .

Решение. Проведём сечение плоскостью, проходящей через центр шаров O перпендикулярно данным плоскостям. Получим окружности с общим центром O , диаметр AB большей окружности и параллельную AB хорду CT большей окружности. Обозначим ещё за x радиус шара, а за H – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на хорду CT . Из условий задачи следует, что $OH=2$, а $\pi CH^2:\pi OA^2=\left(x^2-2^2\right):x^2=0{,}84$. Отсюда находим, что $x^2-4=0{,}84x^2$, $0{,}16x^2=4$ и $x=5$.

Баллы	Критерии оценивания задания С2
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ ИЛИ решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С3 Решите систему неравенств $\begin{cases}|x+2|-x\cdot|x|\le0\\ \left(x^2-x-6\right)\cdot\sqrt{8-x}\le0\end{cases}$

Ответ: $2\le x\le3$ или $x=8$.

Решение. ОДЗ: $8-x\ge0$. Рассмотрим второе неравенство системы. Если $8-x=0$, то $x=8$ и оба неравенства системы выполняются. Если же $8-x>0$, то $x<8$ и $x^2-x-6\le0$, откуда $-2\le x\le3$. При $-2\le x<0$ первое неравенство системы имеет вид: $x^2+x+2\le0$; решений нет. При $0\le x\le3$ первое неравенство системы имеет вид: $-x^2+x+2\le0$. Поэтому $x^2-x-2\ge0$, так что $x\le-1$ или $x\ge2$. Таким образом, множество решений исходной системы неравенств имеет вид: $2\le x\le3$ или $x=8$.

Замечание. Ход решения может быть другим. Например, решая сначала первое неравенство, получаем: $|x+2|\le x\cdot|x|$, откуда $x\ge0$ и, следовательно, $x+2\le x\cdot x$, $-x^2+x+2\le0$. Поэтому $x^2-x-2\ge0$ и $x\ge0$, так что $x\ge2$. И так далее.

Баллы	Критерии оценивания задания С3
3	Обоснованно получен правильный ответ
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы
1	Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется

	верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C4 В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся сторон AB и BC в точках соответственно K и M, а стороны AC в точке T, причём AT = r.
а) Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника KBM, если известно, что $r=2$ и TC = 10.

Ответ: б) $\frac{54}{13}$.

Решение.

а) Центр O вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника ABC, поэтому угол OAK равен углу OAT. Радиус OT – перпендикуляр к касательной AC. Кроме того, из условия AT = r следует, что треугольник OAT – равнобедренный. Поэтому каждый из углов OAT, AOT, OAK равен 45^0, так что угол TAK равен 90^0.

б) Обозначим за x отрезок BK. Тогда BM = BK = x, CM = CT = 10, AK = AT = 2, AC = AT + CT = 12, AB = AK + KB = $x+2$, BC = $x+10$. По теореме Пифагора: $(x+10)^2=(x+2)^2+12^2$. Отсюда находим, что $x=3$ и AB = $x+2=5$. Площадь треугольника ABC равна половине произведения 5 на 12, то есть 30. С другой стороны, площадь треугольника ABC равна половине произведения BA на BC и на синус угла C, а площадь треугольника KBM равна половине произведения BK на BM и на синус угла C. Поэтому площадь треугольника KBM равна произведению площади треугольника ABC на отношение BK к BA и на отношение BM к BC, то есть равна $30\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{13}=\frac{54}{13}$.

Баллы	Критерии оценивания задания C4
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ Имеется верное доказательство пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ При обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{ax^3+3ax-a+1}{x^3+3x-1}=2$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

Ответ: $a<2$ или $a\ge 3$.

Решение. Обозначив $x^3+3x-1=y$, перепишем исходное уравнение в виде $\frac{ay+1}{y}=2$. Так как $y'=3x^2+3>0$, то при $x\ge 0$ функция $y=x^3+3x-1$ возрастает от $y(0)=-1$ до $+\infty$. Поэтому исходная задача сводится к следующей: «найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{ay+1}{y}=2$ имеет хотя бы одно решение в области $y\ge -1$». Уравнение $\frac{ay+1}{y}=2$ перепишется в виде $(a-2)y=-1$. Оно не имеет решений при $a=2$, а при $a\ne 2$ имеет единственное решение $y=\frac{1}{2-a}$. Решая неравенство $\frac{1}{2-a}\ge -1$, получим: $\frac{1}{2-a}+1\ge 0$, $\frac{3-a}{2-a}\ge 0$, $a<2$ или $a\ge 3$.

Замечание. Задачу можно решить и по-другому, например, графическим методом.

Баллы	Критерии оценивания задания C5
4	Обоснованно получен правильный ответ
3	С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек
2	С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a
1	С помощью верного рассуждения получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C6 Несколько различных натуральных чисел, в десятичной записи которых отсутствуют цифры 1 и 9, составляют арифметическую прогрессию.
а) Может ли сумма всех членов такой прогрессии быть равной 298?
б) Может ли в такой прогрессии быть 35 членов?
в) Покажите, что если разность этой арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, то количество членов прогрессии не превосходит 18.

г) Приведите пример, когда разность арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, а количество членов прогрессии равно 18.

Ответ: а) да; б) да.

Решение. Можно считать арифметическую прогрессию возрастающей. Тогда её первый член a и разность d являются натуральными числами.

а) Да, может. Например: 73 + 74 + 75 + 76 = 289.

б) Да, может. Например: 20, 22, 24, …, 88. Эта арифметическая прогрессия содержит ровно $1+\frac{88-20}{2}=35$ членов, причём в десятичной записи каждого из них отсутствуют цифры 1 и 9.

в) Пусть разность этой арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8. Так как цифра десятков и цифра единиц не может быть равна 1 или 9, , а разность прогрессии не меньше 4 и не больше 8, то всякий раз при добавлении этой разности к члену этой прогрессии цифра десятков или не меняется, или увеличивается на 1. Поэтому две последние цифры членов этой прогрессии могут измениться, самое большее, с 20 до 88, то есть на 68. А тогда количество членов прогрессии не превосходит $1+\frac{88-20}{4}=18$.

г) 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88.

Баллы	Критерии оценивания задания C6
4	Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты
3	Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
2	Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
1	Верно получен один из следующих результатов: — верный пример в пункте а) , — верный пример в пункте б) , — верное и полное доказательство утверждения пункта в) , — верный пример в пункте г) ,
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Вариант 4

C1 а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

Ответ: а) $x=\pi+2n\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+2m\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где n, m, $k\in Z$.

б) $x_1=\frac{\pi}{3}$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$.

Решение.

а) Так как $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=-\cos x$, а $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, то исходное уравнение примет вид $2\cos^2 x+\cos x-1=0$, откуда $\cos x=-1$ или $\cos x=\frac{1}{2}$. Поэтому $x=\pi+2n\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+2m\pi$ или $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где n, m, $k\in Z$.

б) Поделив на $\frac{\pi}{2}$ все члены двойного неравенства $-\frac{\pi}{2}\le\pi+2n\pi<\pi$, получим: $-1\le 2+4n<2$ и решений нет. Поделив на $\frac{\pi}{6}$ все члены двойного неравенства $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}+2m\pi<\pi$, получим: $-3\le 2+12m<6$. Отсюда находим, что $m=0$. Поделив на $\frac{\pi}{6}$ все члены двойного неравенства $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{3}+2k\pi<\pi$, получим: $-3\le-2+12k<6$. Отсюда находим, что $k=0$. Поэтому $x_1=\frac{\pi}{3}$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	Критерии оценивания задания C1
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C2 Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7 . Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5 . Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

Ответ: 12 .

Решение. Проведём сечение плоскостью, проходящей через центр шаров O перпендикулярно плоскостям α и β . Получим окружности с общим центром O и две параллельные хорды AB и CT большей окружности, причём хорда AB касается меньшей окружности в точке K , а хорда CT пересекает меньшую окружность в точках P и M . Обозначим ещё за H точку пересечения CT и OK . Искомая площадь сечения большего шара плоскостью α равна $\pi \mathrm{CH}^2$. Из условий задачи следует, что $\pi\left(\mathrm{OP}^2-\mathrm{OH}^2\right)=7$, а $\pi\left(\mathrm{OA}^2-\mathrm{OK}^2\right)=5$. Складывая эти уравнения и учитывая, что $\mathrm{OP}=\mathrm{OK}$ и $\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$, получим: $\pi\left(\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2\right)=\pi\mathrm{CH}^2=12$.

Баллы	Критерии оценивания задания C2
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ ИЛИ решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases}|x-6|+(x-4)\cdot|4-x|\le 0\\ \left(x^2-7x+6\right)\cdot\sqrt{4+x}\le 0\end{cases}$

Ответ: $1\le x\le 2$ или $x=-4$.

Решение. ОДЗ: $4+x\ge 0$. Рассмотрим второе неравенство системы. Если $4+x=0$, то $x=-4$ и оба неравенства системы выполняются. Если же $4+x>0$, то $x>-4$ и $x^2-7x+6\le 0$, откуда $1\le x\le 6$. При $4\le x\le 6$ первое неравенство системы имеет вид: $-x+6+(x-4)(-4+x)\le 0$, то есть $x^2-9x+22\le 0$; решений нет. При $1\le x<4$ первое неравенство системы имеет вид: $-x+6+(x-4)(4-x)\le 0$, то есть $x^2-7x+10\ge 0$, так что $x\le 2$ или $x\ge 5$. Таким образом, множество решений исходной системы неравенств имеет вид: $1\le x\le 2$ или $x=-4$.

Замечание. Ход решения может быть другим. Например, решая сначала первое неравенство, получаем: $|x-6| \le (4-x)\cdot|4-x|$, откуда $x \le 4$ и, следовательно, $-x+6 \le (4-x)\cdot(4-x)$. Поэтому $x^2-7x+10 \ge 0$ и $x \le 4$, так что $x \le 2$. И так далее.

Баллы	Критерии оценивания задания С3
3	Обоснованно получен правильный ответ
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы
1	Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

$\boxed{\text{С4}}$ Точка P – середина стороны AB треугольника ABC, точка T – середина стороны BC треугольника ABC, O – точка пересечения биссектрисы угла B и серединного перпендикуляра к стороне AC.
а) Докажите, что четырёхугольник ABCO – вписанный в окружность.
б) Найдите площадь треугольника OPT, если AC = 24, CO = 13, а произведение сторон AB и BC равно 169.

Ответ: б) 45.

Решение.

а) Пусть K – середина отрезка AC, а O_1 – точка пересечения перпендикуляра к AC в точке K и описанной окружности треугольника ABC (точки B и O_1 лежат по разные стороны от прямой AC). Тогда дуги AO_1 и CO_1 равны. Поэтому BO_1 – биссектриса угла B треугольника ABC, точка O_1 совпадает с точкой O и четырёхугольник ABCO – вписанный в окружность.

б) Обозначим: угол ABC равен 2α, AK = KC = a, OK = b, c – произведение сторон AB и BC, h – высота треугольника ABC, опущенная из B на AC. Тогда каждый из углов ABO, CBO, KAO и KCO равен α, $b=\sqrt{CO^2-a^2}$, а PT – средняя линия треугольника ABC. Поэтому PT = a, а площадь треугольника OPT равна $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(b+\frac{h}{2}\right)$. А так как площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h$ и она же равна $\frac{1}{2}\cdot c\cdot\sin 2\alpha = c\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{abc}{a^2+b^2}$, то $h=\frac{bc}{a^2+b^2}=\frac{bc}{CO^2}$. Поэтому площадь треугольника OPT равна

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(b+\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(b+\frac{bc}{2CO^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\left(5+\frac{5\cdot 169}{2\cdot 13^2}\right)=45.$$

Баллы	Критерии оценивания задания С4
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ Имеется верное доказательство пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ При обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

$\boxed{\text{С5}}$ Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{2ax^3+ax-a+1}{2x^3+x-1}=3$ имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

Ответ: $a<3$ или $a \ge 4$.

Решение. Обозначив $2x^3+x-1=y$, перепишем исходное уравнение в виде $\frac{ay+1}{y}=3$. Так как $y'=6x^2+1>0$, то при $x\ge 0$ функция $y=2x^3+x-1$ возрастает от $y(0)=-1$ до $+\infty$. Поэтому исходная задача сводится к следующей: «найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{ay+1}{y}=3$ имеет хотя бы одно решение в области $y\ge -1$». Уравнение $\frac{ay+1}{y}=3$ перепишется в виде $(a-3)y=-1$. Оно не имеет решений при $a=3$, а при $a\ne 3$ имеет единственное решение $y=\frac{1}{3-a}$. Решая неравенство $\frac{1}{3-a}\ge -1$, получим: $\frac{1}{3-a}+1\ge 0$, $\frac{4-a}{3-a}\ge 0$, $a<3$ или $a\ge 4$.

Замечание. Задачу можно решить и по-другому, например, графическим методом.

Баллы	Критерии оценивания задания С5
4	Обоснованно получен правильный ответ
3	С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек
2	С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a
1	С помощью верного рассуждения получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С6 Даны $n \geq 5$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 30?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 2014?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 144.

Ответ: а) да; б) 62; в) $n = 6, 8, 9$ или 12.

Решение. Можно считать арифметическую прогрессию возрастающей. Тогда её первый член a и разность d являются натуральными числами.

а) Да, может. Например: $4+5+6+7+8=30$.

б) Если сумма арифметической прогрессии фиксирована, то количество n членов арифметической прогрессии тем больше, чем меньше её первый член a и её разность d. Точнее: $\left(a+\frac{n-1}{2}\cdot d\right)\cdot n = S_n \leq 2014$, откуда $\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot 1\right)\cdot n \leq 2014$, $(n+1)\cdot n \leq 4028$ и $n \leq 62$. Последовательность $1, 2, 3, \ldots, 62$ содержит ровно 62 члена, а сумма этой прогрессии $\left(1+\frac{62-1}{2}\cdot 1\right)\cdot 62 = 1953$ не превосходит 2014.

в) Если сумма этой прогрессии равна 144, то $\left(a+\frac{n-1}{2}\cdot d\right)\cdot n = 144$, откуда получаем, что $(2a+(n-1)\cdot d)\cdot n = 288 = 2^5\cdot 3^2$ и $(2+(n-1)\cdot 1)\cdot n \leq 288$. Поэтому $n \leq 16$ и $288 = 2^5\cdot 3^2 \,\vdots\, n$. Следовательно, с учётом неравенства $n \geq 5$ возможны только следующие значения n: 6, 8, 9, 12 и 16. Проверим каждое из них.

При $n=6$ получаем $2a+5d=48$ и подходит, например, такая последовательность: 19, 21, 23, 25, 27, 29.

При $n=8$ получаем $2a+7d=36$ и подходит, например, такая последовательность: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.

При $n=9$ получаем $2a+8d=32$ и подходит, например, такая последовательность: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28.

При $n=12$ получаем $2a+11d=24$ и подходит, например, такая последовательность: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

При $n=16$ получаем $2a+15d=18$, откуда заключаем, что натуральное число d чётно и не больше 1, а таких натуральных чисел нет. Поэтому случай $n=16$ невозможен.

Баллы	Критерии оценивания задания С6
4	Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты
3	Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
2	Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
1	Верно получен один из следующих результатов: — верный пример в пункте а), — верные и обоснованные оценка и пример в пункте б), — приведены верные примеры на каждое из возможных значений n в пункте в), — показано, что все другие значения n в пункте в) не подходят.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Правильное решение каждого из заданий B1–B15 части B оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если экзаменуемый дал правильный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Ответы к заданиям части В

№ задания	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
B1	64	170	10	26
B2	31	80	60000	17
B3	25	6	13	5
B4	465	78000	360	134000
B5	4	72	5	20
B6	0,12	0,91	0,42	0,6875
B7	1	-0,5	3	-1
B8	129	106	128	124
B9	-1	-7	3	4
B10	9	3	6	56
B11	6	12	-12	-9
B12	30	5	0,6	30
B13	5	25	1	6
B14	72	1	12	8
B15	-1,5	-1	8	4